الأسس الرياضية للبرمجة الخطية

تأليف

أ. د . سليمان صالح الحميدان

عميد كلية العلوم – جامعة الملك فهد للبترول والمعادن

د. عمر بن محمد حامد

قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة الملك سعود

د. حسن بن محي الدين حميدة

قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة الملك سعود



ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى ، ١٤٢١هـ (٢٠٠٠م)

الطبعة الثانية ، ١٤٣٨هـ (٢٠١٧م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الحميدان، سليمان

الأسس الرياضية للبرمجة الخطية/ سليمان الحميدان ؛ عمر محمد حامد؛ حسن محي الدين حميدة – ط٢ – الرياض ، ١٤٣٨هـ

٢٩١ص؛ ١٧×٢٤سم

ردمك: ٣-٥٥٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١ – البرمجة الخطية ٢ – البرمجة (رياضيات) أ. حامد ، عمر محمد (مؤلف مشارك) ب. حميدة ، حسن محي الدين (مؤلف مشارك) ج. العنوان

ديوي ٥١٩,٧٢ ١٤٣٨/٢٨٩٢

رقم الإيداع: ١٤٣٨/٢٨٩٢

ردمك: ٣-٥٥٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

نشر هذا الكتاب بناء على موافقة المجلس العلمي في اجتماعه الرابع للعام الدراسي ١٤٣٤/ ١٤٣٥هـ المعقود بتاريخ ٩/ ٥/ ١٤٣٥هـ الموافق ١٠/ ٣/ ٢٠١٤م، بعد استيفائه شروط التحكيم العلمي بالجامعة.



مقدمة الطبعة الثانية

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسوله الأمين وبعد.

إنه من دواعي السرور أن تبدي جامعة الملك سعود اهتماما كبيرا في نشر كتب متخصصة باللغة العربية؛ فالشكر الجزيل لجامعة الملك سعود وللقائمين على إداراتها لهذه الخطوة المباركة التي نرجو أن تعطي، بعون الله، ثمارها سريعا فيترسخ التدريس باللغة العربية وتكون فاتحة خير للتقدم العلمي.

لاتزال المكتبة العربية شبه خالية من كتاب في البرمجة الخطية وتطبيقاتها. لقد كان هدف هذا الكتاب إبراز جمال الجبر الخطي واظهار قيمته العلمية والتطرق إلى بعض تطبيقاته العديدة. الكتاب لم يخرج عن كونه، وفقاً لعنوانه، أسسا رياضية للبرمجة الخطية. إن الروح لم تتغير ولهذا السبب فإننا لم نعير اهتماما للبرمجة المحدبة أو البرمجة التربيعية أو البرمجة غير الخطية أو البرمجة الديناميكية أو مسائل الأمثلية المعقدة أو طرائق الذكاء الاصطناعي. لقد توسعنا قليلاً في توضيح أسلوب التعامل مع البرمجة الصحيحة، وكذلك عرضنا مثالا لشرح طريقة كارماركر ووجهنا القارئ إلى مراجع

مستفيضة في دراسة الأنواع المختلفة من البرمجة مثل كتاب [3] (Nonlinear Programming) Bazaraa وكتاب [5](Operation Research) Taha.

كنا نتمنى أن ندرج نظرية اللعب ضمن تطبيقات البرمجة الخطية وخصوصاً أن هذه النظرية أخذت في السنوات الأخيرة أهمية كبيرة؛ نظراً لأن العديد من مسائل الاقتصاد صيغت على أنها مسائل تابعة لنظرية اللعب. كذلك كنا نود أن نظهر الارتباط الوثيق بين ثلاثة مواضيع في الرياضيات: مسائل الأمثلية ومسائل التقريب وأخيرا المعادلات التفاضلية. إن هذه العلاقة الوثيقة بين هذه المواضيع تتيح الفرصة للاستفادة من النتائج المعروفة في أحد هذه المواضيع في معالجة المواضيع الأخرى. لعل هذه الأمنيات تتحقق يوماً، إلا أنك إذا نظرت إلى الطبعة السابقة فإنك ستجد تغيراً قد حصل، فهناك سلسلة كاملة من التحسينات والتصويبات والإضافات قد تمت. ويعود الفضل في ذلك إلى توجيهات المحكمين الأفاضل. كما أننا قد وضعنا طلابنا الأعزاء أمام أعيننا أثناء إجراء هذه التعديلات، إليهم جميعاً نتوجه بالشكر والعرفان.

نأمل من الله أن نكون قد أدينا الأمانة على خير وجه.

المؤلفون

مقدمة الطبعة الأولى

Introduction

تختص البرمجة الخطية بإيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة خطيةٍ ذات n متغير حقيقي بحيث تخضع هذه المتغيرات إلى شروط خطيه على شكل متباينات أو معادلات.

والبرمجة الخطّية فرع حديث من فروع الرياضيات كانت بدايته الحقيقية عام ١٩٤٧م عندما تمكن Dantzig من إيجاد طريقة عمليه لحل مسألة البرمجة الخطية عرفت باسم طريقه السمبلكس. وقد لاقت هذه الطريقة نجاحا باهرا وحظيت باهتمام شديد وفتحت الباب أمام العديد من التطبيقات الاقتصادية والعسكرية. وأخذ التفاعل بين الدراسات النظرية والمسائل التطبيقية يتزايد بشكل يندر وجوده في فرع آخر من فروع الرياضيات. ومازالت البرمجة الخطية في مراحل التطور المستمرة. ففي السنوات القليلة الماضية ظهر اهتمام متزايد لإيجاد طرائق بديلةٍ عن طريقة السمبلكس، فظهرت طريقة مجسم القطع الناقص عام ١٩٧٩م التي تعتبر ذات أهمية رياضية كبيرة إلا أنها لم تحظ من الناحية العملية بنجاح كبير.

وهناك أيضا طريقة المجموعة الفعالة Active set method وهي مكافئة لطريقة السمبلكس مع وجود متغيرات إضافية. بالإضافة إلى طُرق تعتمد على فك المصفوفات وقد اقترحت للتحكم في الخطاء بشكل أكثر فعالية. في هذا البحث ستكون الدراسة فقط على طريقة السمبلكس.

أما تطبيقات البرمجة الخطية فهي عديدة ومهمة، فشركات البترول تهتم بمزج أصناف مختلفة من البترول الخام بنسب معينة، كي تضاعف أرباحها، ويهتم المهندس الزراعي بتخطيط الأرض الزراعية لتأتي له بالربح الأوفر.

يسعى المختصون بالتحليل العددي للحصول على تقريب أمثل للدوال المتصلة. ولرجال الاقتصاد اهتمامات عديدة في البرمجة الخطية، وقد منحت جائزة نوبل في الاقتصاد عام ١٩٧٥م لعالمين استخدما البرمجة الخطية وسيلة للتطبيق في هذا المجال.

إلا أن البرمجة الخطية ليست مجرد وسيله مهمة للتطبيقات، ولكنها كذلك دراسة رياضية للمتباينات الخطية. وطريقة السمبلكس التي أبدعهاDantzig لا تنحصر أهميتها في كونها وسيلة لحل مسائل البرمجة الخطية لكنها مهيأة كذلك لدراسة مواضيع مهمة لها صلة بالبرمجة الخطية مثل موضوع الثنائية وموضوع حساسية الحلول تجاه تغيرات المعطيات.

إن موضوع البرمجة الخطية عادة يعرض في صياغة اقتصادية أو هندسيه دون التعرض للخلفية الرياضية الأساسية والتي سنسعى لتوضيحها في هذا الكتاب.

إن من أهم استخدامات الحاسب الآلي هو حل المشاكل الرياضية التي كان من الصعب حلها لولا وجود الحاسب الآلي، وسوف نقوم باستخدام برنامج

الماتلاب MATLAB في حل ورسم البرامج الخطية التي سوف ندرسها في هذا الكتاب، وسنشرح في ملحق الكتاب برنامج الماتلاب وكيفية استخدامه في حل البرامج الخطية، وذلك في ملحق (أ). وأما في الملحق (ب) فسوف نسرد بعض البرامج الأساسية التي تساعدنا في حل البرنامج الخطي. وفي ملحق (ج) نذكر بعض من أوامر الماتلاب.

وأخيراً، فإن هذا الكتاب صمم لكي يدرس في السنوات الأخيرة من الدراسة الجامعية، وخلال فصل دراسي واحد. إلا أنه صالح للتدريس في بداية المرحلة الجامعية، وكذلك للقارئ المستقل الذي لديه معلومات أساسية في مبادئ الرياضيات. كما أن هذا الكتاب يُعد مدخلاً إلى مواضيع أكثر تقدماً في الأمثلة، مثل البرمجة غير الخطية ونظرية التحكم وغيرها.

وفي الختام ندعو الله العزيز الكريم أن نكون قد وفقنا بعملنا هذا الذي نأمل أن ينفع الله به ويجعل لنا فيه ثواباً من عنده. وإن كان هناك نقص أو قصور وهذا من طبيعة عمل البشر فإننا نسأل الباري عز وجل عفوه ومغفرته فالكمال لله وحده.

والله الموفق

المؤلفون

المحتويات

الفصل الأول

البرمجة الرياضية
Mathematical Programming

(١,١) مقدمة Introduction

البرمجة الرياضية تعرف بأنها العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة محدده تسمى دالة الهدف Objective function، والتي تعتمد على عدد نهائي من المتغيرات. هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود Constraints. ومن الطبيعي أن تهتم البرمجة الرياضية بدراسة طرائق الحل وكيفية بنائها.

مثال

ليكن البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = x_1^2 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq o \end{aligned}$$

هذه مسألة برمجه رياضية أو أمثلية Optimization لدالة الهدف z . المتغيران هما x_1 و x_2 ، وهما مقيدان بالشرطين المذكورين آنفا. إنه من المرغوب فيه إيجاد قيم x_1 و x_2 التي تخفض من قيمة دالة الهدف، ضمن القيود المعطاة.

أن الصياغة العامة للبرمجة الرياضية تأخذ الشكل التالي:

optimize (minimization or maximization)

$$z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

subject to (s. t.)

$$\left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \begin{cases} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{cases}$$

يعتبر علم البرمجة من العلوم الحديثة، فقبل عام ١٩٤٠م لم يكن هناك طرق كثيرة لحل البرامج الرياضية في عدة متغيرات. ولكن وبعد ظهور الحاسب الآلي ظهرت طرائق عديدة لحل مشكلات البرمجة الرياضية. ففي الفترة ما بين ١٩٤٠-١٩٦٠م شهد العالم تقدماً كبيراً في فرع مهم من فروع الأمثلية ويعرف بالبرمجة الخطية. ثم بعد ذلك ظهرت طرائق لحل مسائل البرمجة الرياضية بمعظم أشكالها.

إن للبرمجة الرياضية تطبيقات عديدة ومهمة في مختلف مجالات الحياة: في العلوم، والهندسة، والرياضيات، والاقتصاد، والتجارة وغيرها. نذكر منها:

١ - تصميم المفاعلات الكيميائية.

٢- صناعة البلاستيك.

٣- تصميم محركات الطائرات.

٤- تصميم المباني والجسور.

٥- مسائل النقل والإنتاج.

وهناك استخدامات للبرمجة الرياضية في فروع التحليل العددي نذكر منها:

١ – ملاءمة البيانات Data fitting.

٢ – المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية.

هذه فقط أمثلة بسيطة على التطبيقات العديدة للبرمجة الرياضية.

ولكي نعطي فكرة عن البرمجة الرياضية، نأخذ في عين الاعتبار مسألة النقل: في إحدى الدول هناك سبعة مصانع سكر. ينتج المصنع F_j كمية من السكر في الشهر الواحد مقدرها a_j طناً. هناك ثلاثمائة موقع في تلك الدولة. يحتاج الموقع G_k كمية من السكر في الشهر الواحد مقدارها b_k طناً. نفترض أن $\sum_{i=1}^{7} a_i = \sum_{k=1}^{300} b_k$ (الكمية المنتجة من السكر خلال شهر تساوي الكمية المستهلكة). لتكن c_{jk} هي تكلفة نقل طن واحد من المصنع F_j إلى الموقع G_k. والمطلوب هو تحديد كمية السكر x_{jk} التي ينبغي نقلها من المصنع F_j إلى الموقع G_k بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

(١,٢) البرمجة الخطية Linear Programming

أكثر أنواع البرامج الرياضية سهولة هي التي تكون فيها الدوال $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ خطّيه أي أن:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

و

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

حيث إن c_i و a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ ثوابت معلومة، تعرف المعاملات c_i بمعاملات التكلفة Cost coefficients. هذا النوع من البرامج يعرف بالبرنامج الخطي. سوف تكون دراستنا في هذا الكتاب مقصورة على هذا النوع من البرامج الخطية.

(١,٣) البرمجة الخطية الصحيحة Integer Linear Programming

البرنامج الخطي الصحيح هو عبارة عن برنامج خطي مضاف إليه شرط إضافي وهو أن المتغيرات عبارة عن أعداد صحيحه، مثل عدد العاملين أو عدد الآلات في مصنع. عادة ما تحتوي البرامج الرياضية على متغيرات صحيحة وأخرى تأخذ قيم كسريه وتكون المعادلات فيها خطية. تلك البرامج تسمى البرامج المختلطة. ومن الطرائق المشهورة لحل البرامج الصحيحة أو المختلطة طريقة التفريع والتحديد Branch and bound method.

كما يجدر هنا أن نذكر طريقة المستوى القاطع (Cutting plane algorithm) حيث يتم بداية غض النظر عن كون المتغيرات أعداداً صحيحة ويتم إيجاد الحل الأمثل الذي

غالبا ما يشمل أعداداً غير صحيحة. وبعدئذ تبدأ المرحلة الثانية بإدخال شروط اضافية على المسألة تسمى القواطع؛ وذلك بهدف تقريب الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى كي يصبح أعداداً صحيحة. انظر Taha [5].

(٤ , ١) البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming

يفترض عاد أن الربح الصافي يتناسب طرداً مع الكمية المنتجة أي أن الربح عبارة عن $c_k x_k$ حيث c_k عدد ثابت. إلا أنه في حقيقة الأمر، فإن تأثير العرض والطلب وإمكانية تغير الكلفة يجعل الربح مختلفاً عما ذكر آنفا وأقرب أن يكون على النحو التالي:

$$Q\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right).x_k$$

البرنامج غير الخطي هو البرنامج الرياضي بشكله العام، حيث تكون دالة الهدف أو القيود أوكلاهما غير خطية. ونعتقد أن أكثر الطرق شيوعاً لحل البرنامج غير الخطي هي طريقة دوال الجزاء والحد التكرارية Sequential Penalty and barrier functions. وهو أصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق حتى الآن على أمثل طريقة لحل هذا النوع من البرامج الرياضية. انظر Bazaraa [3].

(١,٥) البرمجة الديناميكية Dynamic Programming

البرمجة الديناميكية هي نوع من الأمثلية التي تطبق بشكل خاص على المسائل التي تتطلب متتالية من القرارات المترابطه، يحوّل كل قرار منها الوضع الحالي إلى وضع جديد. فهناك إذن متتالية من القرارات تؤدي إلى متتالية من الأوضاع.

وتسعى البرمجة الديناميكية إلى البحث عن تلك القرارات التي تجعل دالة معينة أعظمية (أو أصغرية). فعلى سبيل المثال لنفترض أنك تعيش في مدينة يتم السير في شوارعها باتجاه واحد وإنك تود الانتقال من مكان A إلى مكان B بأقل جهد ممكن (ربما في أقل وقت ممكن) وأن هناك عشرين طريقاً مختلفاً للانتقال من A إلى B . إن إيجاد طريقة فعالة للوصول من A إلى B بأقل جهد ممكن هي مما تسعى إليه البرمجة الديناميكية.

إن إيجاد طريقة ناجعة للوصول من A إلى B بأقل جهد ممكن هي من ضمن ماتسعى إليه البرمجة الديناميكية (Shortest – Route Problem). انظر Taha[5].

الفصل الثاني

البـرمجة الخطيـة
Linear Programming

(٢,١) مقدمة Introduction

ندرس في هذا الباب عدداً من الأساسيات المتعلقة بالبرمجة الخطية. ففي البداية سندرس بشكل مختصر بعض المسائل التطبيقية التي يمكن أن تظهر في كثير من التطبيقات العملية وسندرس بعض هذه المسائل بشكل موسع في الباب السادس.

إن مسألة البرمجة الخطية عادة ما يعبر عنها على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

حيث $\mathbf{x}$ متجه من R^n وكذلك $\mathbf{c}$. أما $\mathbf{A}$ فهي مصفوفة من نوع $m \times n$ و $\mathbf{b}$ متجة من R^m. إن $f(\mathbf{x})$ تسمى دالة الهدف وهي دالة خطية و $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ هي مجموعة قيود على شكل علاقات رياضية خطية، بالإضافة إلى ذلك هناك شرط عدم سالبيه

المتغيرات و المعبر عنه بـ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ والتي تعني أن جميع مركبات $\mathbf{x}$ أكبر من أو تساوي الصفر.

(٢ , ٢) بعض نماذج البرمجة الخطية Some linear programming models

يتضمن هذا الفصل بعض النماذج التي تبين طبيعة البرمجة الخطية. وسوف تتم صياغتها بشكل رياضي مما يتيح إبراز الصياغة الرياضية القياسية للبرمجة الخطية. سنعطي الآن مثالاً تطبيقياً على البرنامج الخطي، ثم ننتقل إلى النماذج الخطية بعد ذلك.

مثال (١ , ٢ , ٢)

على قطعة معينه من الأرض نود أن نبني عدة مساكن، ونود أن تكون بعض هذه المباني ذات أدوار خمسه ونرمز لعددها بالرمز x وبعضها الآخر ذات دورين ونرمز لعددها بالرمز y . فكم ينبغي أن يكون عدد النوع الأول من هذه المباني وكم ينبغي أن يكون عدد النوع الآخر كي تستوعب أكبر عدد من السكان، علماً أن المعطيات مبينة في الجدول الآتي:

عدد الأدوار	تكلفة المبنى الواحد	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	المساحة اللازمة لكل مبنى	عدد السكان في المبنى الواحد	عدد المباني
5	600,000	120	800	30	x
2	200,000	60	600	12	y

ثم إن المبلغ المتوفر هو: 18,000,000 دولار، وساعات العمل المتيسرة 4500 ساعة ومساحة الأرض الكلية تبلغ 42,000 متر مربع.

إن الصياغة الرياضية لهذه المسألة هي كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x + 12y \\ \text{s. t.} \quad & 800x + 600y \le 42{,}000 \\ & 120x + 60y \le 4500 \\ & 600{,}000x + 200{,}000y \le 18{,}000{,}000 \end{aligned}$$

x, y عددان صحيحان غير سالبين

وعند حل هذه المسألة يتبين أن الحل الأمثل يتحقق عندما تكون $x = 15$, $y = 45$ أي ١٥ مبنى من خمسة أدوار و٤٥ مبني من دورين ويتبقى $300m^2$ دون أن تبنى.

(١ , ٢ , ٢) النموذج الأول (مسألة التغذية) The Diet Problem

تود إدارة الخدمات في إحدى المؤسسات تأمين وجبه غذائية من قائمه تحتوي على n نوع من الأطعمة بحيث تحتوي على كميات معينة من m نوع من الفيتامينات وتكون تكلفة الوجبة أقل ما يمكن. لنرمز بـ a_{ij} لكمية الفيتامين من النوع i في وحدة الطعام j، ولنرمز بـ b_i لكمية الفيتامين من النوع i التي يجب أن تحتويها الوجبة، و لنرمز c_j لتكلفة الوحدة من الطعام j. والمطلوب هو تحديد الكميه x_j من نوع الطعام j بحيث تكون حلا للبرنامج الآتي:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

فعلى سبيل المثال اذا كانت المعطيات كما هي مبينة في الجدول الآتي:

الفيتامين	كمية الفيتامين المتوفره في وحدة الطعام			كمية الفيتامين التي يجب توفرها
	حليب	لحم	بيض	
A	10	15	10	20
B	100	10	10	50
C	10	100	10	10
تكلفة الوحدة	2	3	1	

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

s. t.

$$10x_1 + 15x_2 + 10x_3 \geq 20$$

$$100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50$$

$$10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حيث x_1 تمثل عدد اللترات من الحليب و x_2 تمثل كمية اللحم بالكيلوغرام و x_3 تمثل عدد البيض.

(٢ , ٢ , ٢) النموذج الثاني (مسألة الإنتاج) The Production Problem

مصنع ينتج n صنفاً ويحتاج في سبيل ذلك إلى m من المواد الخام. كل صنف يحتاج إلى كمية معينة من كل مادة خام. لنرمز بـ a_{ij} إلى كمية المادة الخام i التي تحتاجها الوحدة من الصنف j . ولتكن b_i هي الكمية المتوفرة من المادة i ولنفترض أن c_j هو ربح الوحدة من الصنف j والمطلوب هو تعيين الكميه x_j من الصنف المنتج j بحيث يصبح الربح الإجمالي $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ أعظم ما يمكن، مع مراعاة أن الكمية المتوفرة من المادة i هي b_i، ولذلك فإن الصياغة الرياضية لمسألة الإنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, \cdots, m \\
& x_j \ge 0 \qquad j = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

فعلى سبيل المثال لنأخذ المعطيات المبينة في الجدول الآتي:

	كمية المادة الخام اللازم لإنتاج وحدة من الصنف			كمية المادة الخام المتوفرة
المادة الخام	الكرسي	الطاولة	الدولاب	
الصنوبر	3	4	2	57
السنديان	2	1	2	27
ساعات العمل	4	5	4	73
الربح في وحدة الصنف	160	210	100	

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\begin{aligned} \max \quad & 160x_1 + 210x_2 + 100x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 57 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 27 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 73 \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 أعداد صحيحة غير سالبة

حيث x_1 تمثل عدد الكراسي و x_2 تمثل عدد الطاولات و x_3 تمثل عدد الدواليب.

(٢ , ٢ , ٣) النموذج الثالث (مسألة النقل) The Transportation problem

في إحدى الدول يوجد m فرع لمصنع سكر. الفرع i ينتج a_i طنا من السكر. توزع كميات السكر هذه على n منطقه. المنطقة j تحتاج إلى b_j طنا من

السكر في الشهر الواحد. ولنفترض أن كميات السكر المنتجة تستهلك جميعها، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ليكن c_{ij} هي تكلفة نقل طن واحد من الفرع i إلى المنطقة j . والمطلوب هو تحديد كمية السكر x_{ij} التي ينبغي نقلها من المصنع i إلى المنطقة j بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن. بمعنى أنه علينا أن نحقق البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
&\text{s. t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \cdots, m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \cdots, n \\
&x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

لقد تم تطبيق هذه المسألة فعلا في إحدى الدول وأدى ذلك إلى توفير في تكلفة النقل تعادل ١٠٪.

(٤ , ٢ , ٢) النموذج الرابع (مسألة التوظيف) The Assignment Problem

هذا النموذج يشبه نموذج النقل إلا أن قيم a_i ، b_i هنا تساوي الواحد. فعلى سبيل المثال، هناك ثلاثة أساتذة يدرسون ثلاثة مقررات، كل واحد من هؤلاء

الأساتذة يصحح أوراق اختبار أحد هذه المقررات، ولنفرض أن c_{ij} هو الزمن اللازم للأستاذ i كي يصحح أوراق المقرر j وفقا للجدول الآتي:

	المقرر 1	المقرر 2	المقرر 3
الأستاذ 1	6	4	8
الأستاذ 2	9	3	6
الأستاذ 3	5	2	7

والسؤال هو كيف يجب أن تنظم عملية التصحيح هذه كي يكون زمن التصحيح الكلي أقل ما يمكن إذا كان:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{عندما يقوم الأستاذ } i \text{ بتصحيح المقرر } j \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن الصياغة الرياضية لهذه المسألة تأخذ الشكل الآتي:

$$\min \quad 6x_{11} + 4x_{12} + 8x_{13} + 9x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} + 5x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33}$$

s. t.

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13} &&&= 1\\
&&x_{21}+x_{22}+x_{23} &&= 1\\
&&&x_{31}+x_{32}+x_{33} &= 1\\
&x_{11} &+x_{21} &+x_{31} &= 1\\
&x_{12} &+x_{22} &+x_{32} &= 1\\
&x_{13} &+x_{23} &+x_{33} &= 1\\
&&&x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33} &\geq 0
\end{aligned}
$$

(٥ , ٢ , ٢) نظرية اللعب Game Theory

إن أفضل طريقة لشرح مصفوفة اللعب هي أن نعطي المثال التالي:

مسألة جنرال بلوتو **Blotto**: يهدد العدو المدينة S بأربع فرق عسكريه انطلاقاً من موقعه P. يمكن للعدو أن يصل للمدينة S من خلال طريقين w_1, w_2. بإمكانه توزيع قواته كما يشاء على هذين الطريقين، إلا أن الفرقة الواحدة لا يمكن تجزئتها. من جهة أخرى، يدافع الجنرال عن المدينة S بخمس فرق. بإمكان الجنرال توزيع قواته على الطريقين w_1, w_2، كما يشاء إلا أن الفرقة الواحدة لا يمكن تجزئتها. إن الرقم 1 في المصفوفة التالية يعني أن العدو ينتصر، بينما -1 يعني أن الجنرال بلوتو هو المنتصر

العدو \ بلوتو		على w_1	5	4	3	2	1	0
		على w_2	0	1	2	3	4	5
w_1	w_2							
4	0		-1	-1	1	1	1	1
3	1		1	-1	-1	1	1	1
2	2		1	1	-1	-1	1	1
1	3		1	1	1	-1	-1	1
0	4		1	1	1	1	-1	-1

يمكن تحويل مصفوفة اللعب الى برنامج خطي. انظر صفحة 539-541 من كتاب [5] Taha.

تمارين الباب الثاني

(٢,١) شركه لإنتاج مواد البلاستيك تريد إنتاج منتج جديد من أربعة مركبات كيميائيه. هذه المركبات مكونه من ثلاث مواد هي B, A وC. نسب المواد في هذه المركبات وتكلفتها معطاة في الجدول التالي:

المركب الكيميائي	1	2	3	4
نسبة A في المركب	30	20	40	20
نسبة B في المركب	20	60	30	40
نسبة C في المركب	40	15	25	30
التكلفه/ الكيلو	20	30	20	15

المنتج الجديد يحتوي على 20٪ من مادة A، ويحتوي على الأقل 30٪ من مادة B، ويحتوي على الأقل 20٪ من ماده C. وبسبب المضاعفات الجانبية فإن نسبة المركبات 1 و2 يجب أن لاتتعدى ٢٠٪ و٣٠٪ من المنتج الجديد على التوالي. اكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة لإنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفة.

(٢,٢) مصنع ينتج نوعين من المشروبات 1,2 كل نوع من هذه المشروبات يتكون من مادتين A,B. لإنتاج صفيحة من المشروب ١ نحتاج إلى 5 لترات من مادة A و5 لترات من مادة B ولإنتاج صفيحة من المشروب 2 نحتاج إلى 3 لترات من مادة A و11 لترات من مادة B، المصنع يستطيع توفير 30 لترات من مادة A و55 لترات من مادة

B في اليوم، وكذلك المصنع قرر بناء على طلب شركات التوزيع أن لاينتج أكثر من أربع صفائح يوميا للمشروب. إذا كان ربح المشروب 1 هو 3 ريال لصفيحة، وربح المشروب 3 هو 4 ريال لصفيحة. كم صفيحة ينتجون ليحصلوا على أكبر ربح.

اكتب برنامج خطي لهذه المسألة.

(٢,٣) مزارع يملك مزرعة مساحتها 1200 فدان تنتج هذه المزرعة قمحا، وبطاطسا، وبازلاء كل نوع من هذه المحاصيل يعطي ربحاً محددا، ويحتاج إلى ساعات عمل وتنقية وتسميد وبذر حسب الجدول التالي:

المحصول	ساعات العمل	تكلفة التنقية	تكلفة التسميد	تكلفة البذر	ثمن البيع
قمح	6	20	14	2	144
بطاطس	8	12	9	3	125
بازلاء	3	8	9	1	75

إذا توفر لدى المزارع 3600 ريالاً و7400 ساعة عمل، فإنه يود معرفة المساحة x لزراعة القمح والمساحة y لزراعة البطاطس، والمساحة z لزراعة البازلاء بحيث يكون ربحه ضمن الشروط المذكورة، أكبر مايمكن. والمطلوب مبدئياً كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

(٢,٤) في مزرعة تربى فيها البقر والخراف هناك خمسون موقعاً للبقر ومئتين للخراف تمتد على مساحة مقدارها 50 هكتار. تحتاج البقرة الواحدة إلى هكتار واحد وتحتاج الخراف إلى 0.2 هكتار. إن عدد ساعات العمل المتاحة سنوياً تُقدر بـ 10000 ساعة ويلزم للبقرة الواحدة 150 ساعة عمل سنوياً ويلزم للخروف الواحدة 25 ساعة

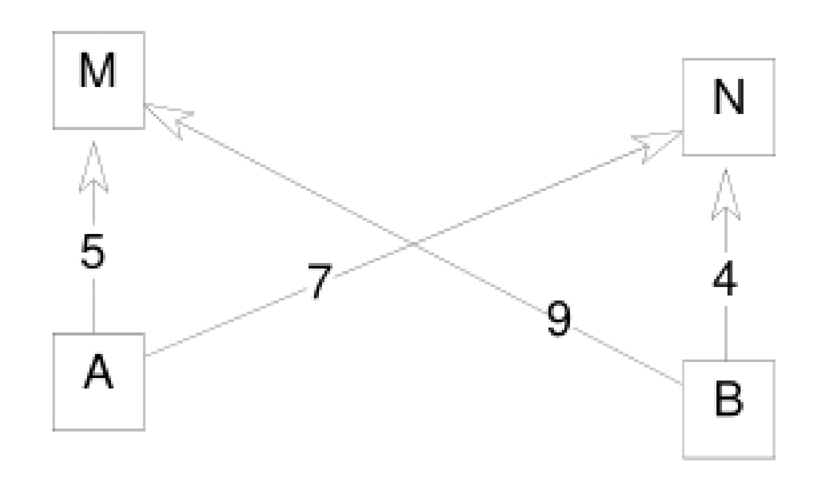
عمل سنوياً. إن الربح الصافي عن كل بقرة يبلغ 250 ريالاً وعن كل خروف 45 ريالاً. ويتعين تحديد عدد البقر x_1 وعدد الخراف x_2 بحيث يكون الربح الإجمالي أعظم ما يمكن.

(٢,٥) على أرض زراعية يراد زراعة بطاطس وجزر. بعض المعلومات الخاصة بذلك موضحة في الجدول التالي:

	تكاليف زراعة هكتار	عدد ساعات العمل لهكتار واحد	الربح الصافي لهكتار
بطاطس	5	2	20
جزر	10	10	60

إن المساحة x_1 التي ستزرع فيها البطاطس والمساحة x_2 التي ستزرع فيها الجزر، سوف يتم تحديدهما بحيث يصبح الربح الأجمالي أقصى مايمكن، علماً أن هناك 1200 هكتار تحت التصرف وأن المبلغ المخصص 7000 ريال وساعات العمل 5200. اكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة.

(٢,٦) لنفرض أن هناك ثماني شاحنات في المحطة A وست شاحنات في المحطة B. المدينة M بحاجة إلى سبع شاحنات، والمدينة N بحاجة إلى سبع شاحنات. كيف يمكن تحقيق ذلك بين المحطتين والمدينتين كي يكون استهلاك البنزين أقل ما يمكن. اكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة، حيث الأرقام على الشكل تمثل عدد الشاحنات التي يمكن أن تمر من المحطة إلى المدينة.



(٢,٧) نوعان من الطعام B,A يحتوي كل كيلوغرام منهما على الكميات التالية من الفيتامينات:

A	B	
2.0	0.5	فيتامين V
2.5	1.2	فيتامين X
1.5	1.5	فيتامين Y
1.0	3.0	فيتامين Z

نود أن نكوّن وجبة يومية من هذين النوعين ذات تكلفة صغرى بحيث تحتوي على الأقل على الكميات التالية من الفيتامينات:

V=140; X=300; Y=270; Z=300.

علماً أن ثمن النوع A هو ضعفا ثمن النوع B. اكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة.

(٢,٨) يراد بناء مسجد جديد بالقرب من أربعة منازل قائمة في المواقع التالية:

$$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},$$

ليكن موقع المسجد هو $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. أين يجب بناؤه إذا ما أُريد أن يكون مجموع المسافات بين هذا المسجد وبين المنازل الأربعة أقل مايمكن. ملاحظة: المسافة المقصودة هي مسافة الشارع، فمثلاً المسافة بين $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ وبين $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ هي:

$$|x_1 - 3| + |x_2| .$$

(٢,٩) مصنع ينتج شنط وطاولات، إن إنجاز ذلك يتطلب إنجاز ثلاثة أنواع من العمليات: القطع، والتجميع، والتجهيز. الجدول التالي يوضح الزمن اللازم لكل عملية من هذه العمليات لإنتاج شنطة واحدة أو طاولة واحدة.

	القطع	**التجميع**	**التجهيز**
الشنطة	6/5	1	3/2
الطاولة	1	1/2	2

إن الربح الصافي للشنطة الوحدة هو 80 ريالاً وللطاولة الواحدة 55 ريالاً. لنفترض أن ساعات العمل المتاحة للقطع لاتتجاوز 72 ساعة يومياً وللتجميع 50 ساعة يومياً وللتجهيز 120 ساعة. والمطلوب معرفة عدد الشنط المصنعة، وكذلك عدد الطاولات كي يكون الربح الأجمالي أعظم مايمكن ضمن الشروط المذكورة.

(٢,١٠) سبع فروع لأحد مصانع للسكر، ينتج الفرع F_j كل شهر a_j طناً $(j = 1, \dots, 7)$ وهناك 300 موقع G_k يستهلك b_k طنا $(k = 1, \dots, 300)$ من السكر

شهرياً. ولنفترض أن الكمية المنتجة من السكر في الشهر الواحد تساوي الكمية المستهلكة في نفس الفترة الزمنية أي أن $\sum_{g=1}^{7} a_j = \sum_{k=1}^{300} b_k$. لنرمز لنكلفة نقل طن واحد من السكر من الفرع F_j إلى الموقع G_k بالرمز c_{jk}. والمطلوب كتابة البرنامج الخطي الذي يتم من خلاله تعيين كمية السكر x_{jk} التي ينبغي نقلها من الفرع F_j إلى الموقع G_k. بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن ضمن الشروط المذكورة.

(٢ , ١١) شخص يمتلك 18000 ريال يود استثمارها في ثلاثة أنواع من السلع، أحدها ذو مجازفة بسيطة، والثانية ذو مجازفة متوسطة، أما الثالثة فهو ذو مجازفة عالية. وهو سوف يستثمر 2000 ريال أكثر في السلعة ذات المجازفة البسيطة من السلعة ذات المجازفة المتوسطة. وسوف يستثمر على الأكثر مبلغ 8000 في السلعة ذات المجازفة الكبيرة. و14000 ريالاً على الأكثر في السلعتين المتوسطة والعالية المجازفة. إن العائد المتوقع من السلعة ذات المجازفة البسيطة هو 7%، و9% من السلعة ذات المجازفة المتوسطة، و11% من السلعة ذات المجازفة والعالية. والمطلوب معرفة المبلغ الذي ينبغي استثماره في كل نوع من هذه السلع والعائد المالي الذي يتوقع الحصول عليه.

(٢ , ١٢) تستورد مصفاة بترول نوعين من الزيت الخام، خفيف سعره 25 دولاراً للبرميل وثقيل سعره 20 دولاراً للبرميل. تنتج هذه المصفاة غازولين، وزيت للتدفئة وبنزينا بكميات للبرميل الواحد موضحة حسب الجدول التالي:

	غازولين	زيت للتدفئة	بنزين
زيت خفيف	0.3	0.2	0.3
زيت ثقيل	0.3	0.4	0.2

تعاقدت المصفاة مع إحدى الجهات لتزويدها بـــ 900000 برميل من الغازولين و800000 برميل من زيت التدفئة الغازولين و500000 برميل البنزين. تود المصفاة معرفة كمية الزيت الخام الذي يجب أن تستوردها لتلبي الكمية المطلوبة بأقل تكلفة. والمطلوب صياغة هذه المسألة على شكل برنامج خطي.

(٢ , ١٣) مصنع كبير للأنسجة له فرعان B وA. يستورد هذا المصنع مواد الخام من مصدرين ويوزع إنتاجه على ثلاثة أسواق. تكاليف النقل للطن الواحد بين مصدري الاستيراد وبين فرعي المصنع وبين الأسواق موضحة في الجدولين التاليين:

	فرع المصنع B	**فرع المصنع A**
مصدر الأستيراد 1	دولار1	دولار 1.5
مصدر الأستيراد 2	دولار2	دولار1.5

	السوق 3	**السوق 2**	**السوق 1**
فرع المصنع A	1 دولار	2 دولار	4 دولار
فرع المصنع B	2 دولار	4 دولار	3 دولار

هناك عشرة أطنان متوفرة في مصدر الاستيراد الأول و15 طناً متوفرة في مصدر الاستيراد الثاني. إن احتياجات الأسواق هي 8 أطنان و14 طنا و 3 أطنان على التتالي.

والمطلوب صياغة هذه المسألة لإيجاد أقل تكلفة ممكنة بين مصدري الاستيراد وبين الأسواق الثلاثة.

الفصل الثالث

هندسة وجبر البرمجة الخطية والصياغة القياسية
Geometry, Algebra and Standard Form of Linear Programming

(٣ , ١) مقدمة Introduction

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية، ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي. ولذلك سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكننا من معرفة الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة هندسية. سندرس في هذا الباب بعض أساسيات التحليل المحدب وطريقة حل البرنامج الخطي هندسياً. ومن ثم سنعطي فكرة عن الحل الهندسي وننتقل إلى الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

(٣ , ٢) المجموعات المحدبة Convex sets

تعريف (٣ , ٢ , ١)

تدعى المجموعة الجزئية $C \subset R^n$ محدبة إذا تحقق مايلي:

$\forall\ \lambda \in [0,1]$ $\forall\ x_1, x_2 \in C$ فإن $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

لاحظ أن $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين x_1, x_2 . وبالتالي فإن تحدب C يعني هندسياً أنه لأي نقطتين x_1, x_2 في C وعليه فإن القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتي تنتمي إلى C . إن المجموعة $\{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ هي مجموعة محدبة، وكذلك $\{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ، $\mathbf{A}$ حيث هي مصفوفة $m \times n$ ، هي أيضا مجموعه محدبة. إذا كانت $K_1, K_2, \ldots, K_r$ مجموعات محدبة في ^{n} عندئذ تكون المجموعة الآتية:

$$K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_r \ .$$

أيضا محدبة. المستوى H في R^n هو مجموعة محدبة.

(٣,٣) المستوى الفوقي ونصف الفضاء Hyperplane and halfspace

إن المستوى الفوقي في R^n هو تعميم لفكرة الخط المستقيم في R^2 وكذلك لفكرة المستوي في R^3 .

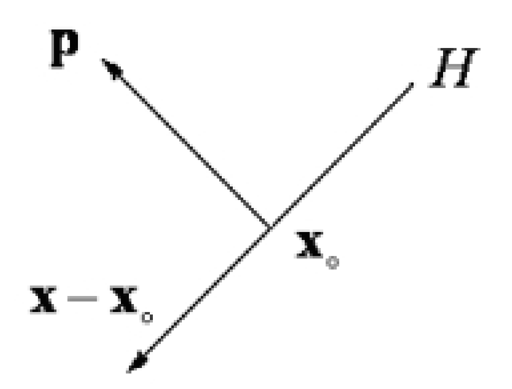
تعريف (١,٣,٣)

المستوى الفوقي H في R^n هو مجموعة لها الشكل التالي:

$$H = \left\{\mathbf{x}: \mathbf{p}^T \mathbf{x} = k\right\} \qquad (3.1)$$

بحيث إن $\mathbf{p}$ هو متجه غير صفري في R^n و k عدد ثابت. و المتجه $\mathbf{p}$ عمودي على H.

لتكن $\mathbf{x}_\circ \in H$ وبالتالي $\mathbf{p}^T\mathbf{x}_\circ = k$، وبما أن لكل $\mathbf{x} \in H$ يكون $\mathbf{p}^T\mathbf{x} = k$ ، لذا بطرح المعادلتين نحصل على $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\circ) = 0$. أي أنه يمكن تمثيل المستوى الفوقي H بمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\circ) = 0$ بحيث إن $\mathbf{x}_\circ$ هي أي نقطه ثابتة في H. إن المستوى الفوقي مجموعة محدبة. الشكل التالي يوضح المستوى الفوقي والمتجه $\mathbf{p}$ مع ملاحظة أن $\mathbf{p}$ عمودي على $\mathbf{x}-\mathbf{x}_\circ$ لجميع $\mathbf{x} \in H$.



إن المستوى الفوقي H يقسم R^n إلى منطقتين تسمى كل واحدة منهما نصف فضاء، وبالتالي فإن نصف الفضاء هو عبارة عن مجموعة النقاط التي على الشكل التالي:

$$\{\mathbf{x}: \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq k\}$$

أيضا من الممكن تمثيل نصف الفضاء بالمجموعة التالية:

$$\{\mathbf{x}: \mathbf{p}^T\mathbf{x} \leq k\}$$

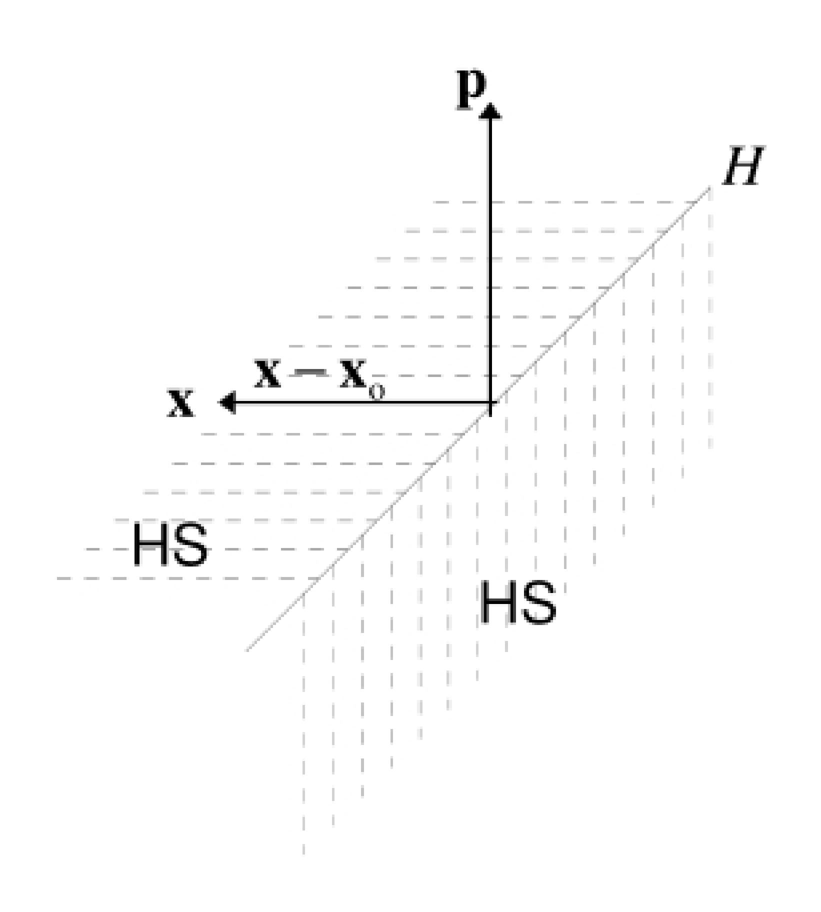
إن اتحاد المجموعتين السابقتين هو R^n وبالرجوع إلى النقطة الثابتة $\mathbf{x}_o$ فإن نصف الفضاء يمكن أن يمثل بـ

$$\left\{\mathbf{x}:\mathbf{p}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)\geq 0\right\}$$

أو

$$\left\{\mathbf{x}:\mathbf{p}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o)\leq 0\right\}$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



إن المستوى الفوقي وأنصاف الفضاءات هي مجموعات محدبة.

(٣ , ٤) المخروطات المحدبة Convex cones

إن المخروطات المحدبة هي مجموعات خاصة ومهمة من المجموعات المحدبة.

تعريف (١ , ٤ , ٣)

المخروط المحدب K هو مجموعة محدبة تحقق الخاصية التالية:

$$\lambda x \in K, \quad \forall x \in K \quad and \quad \forall \lambda \geq 0$$

من الملاحظ أن المخروطات المحدبة دائماً تحوي نقطة المركز، وذلك بجعل $\lambda = 0$، وكذلك إذا أعطينا أي نقطه $x \in K$ فإن نصف المستقيم λx ينتمي إلى K. وبالتالي فإن المخروط المحدب هو عبارة عن مجموعه محدبة تتكون بشكل كامل من أنصاف مستقيمات منبعثة من المركز.

(٣ , ٥) المنطقة المضلعة Polyhedral Sets

إن جميع حلول المعادلة $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ حيث a_1, a_2, b أعداد حقيقية تمثل هندسياً خطاً مستقيماً شريطة أن يكون أحد العددين a_1, a_2 على الأقل لا يساوي صفر. كما أن جميع حلول المتباينة $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ تمثل نصف مستوى. وبالمثل فإن جميع حلول المتباينة $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$ تمثل نصف فضاء. وعلى سبيل المثال فإن كلاً من المتباينات الخمسة التالية تمثل نصف فضاء:

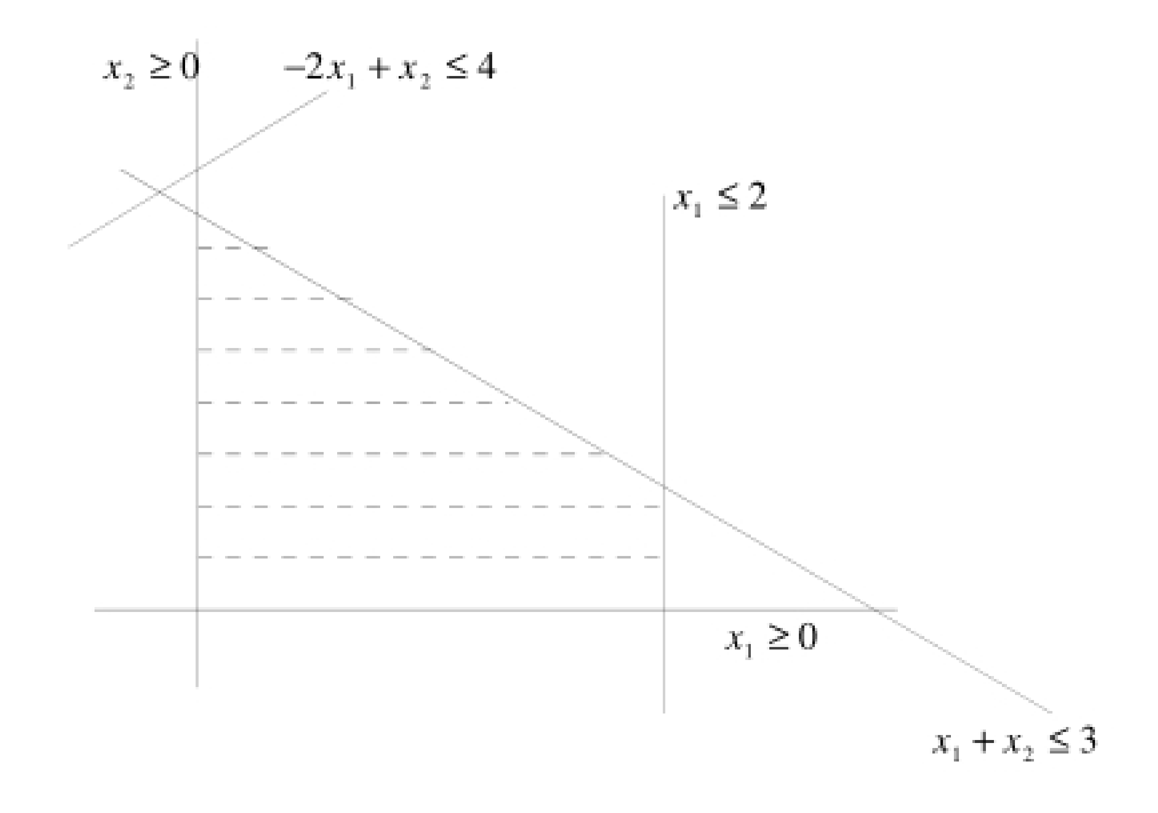
$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + x_2 \qquad &\leq 4 \\ x_3 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

إن تقاطع عدد محدود من أنصاف الفضاءات يدعى منطقة مضلعة (Polyhedral).

ليكن لدينا أنصاف الفضاءات التالية:

$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

إن تقاطع خمسة أنصاف هذه الفضاءات هذه يعطي المنطقة المخططة في الشكل التالي، وهي منطقة مضلعة، من الواضح أنها منطقه محدّبة.



(٣, ٦) النقاط الحدية Extreme points

مفهوم النقطة الحدّية يلعب دوراً رئيساً في نظرية البرمجة الخطية. في البداية نعطي التعريف التالي:

تعريف (٣, ٦, ١)

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ نقاطاً من مجموعة $C \subset R^n$ يقال إن النقطة x هي تركيب محدب من النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_m$ إذا أمكن كتابة x على النحو التالي:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m \qquad (3.2)$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ أعداد غير سالبه وتحقق الشرط التالي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$$

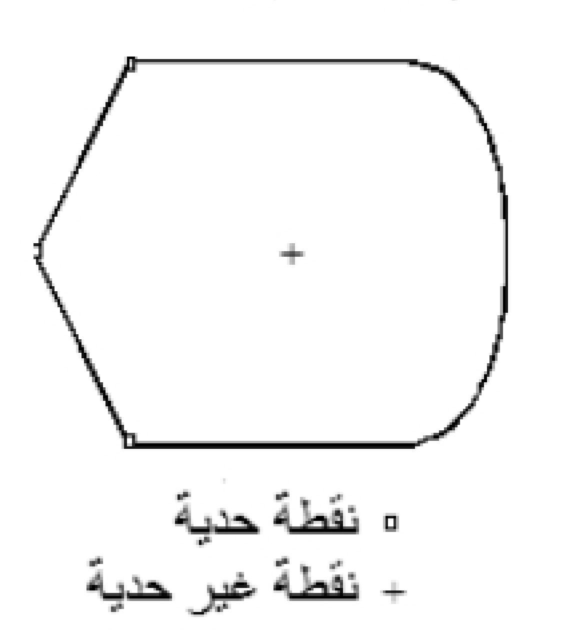
تعريف (٣, ٦, ٢)

يقال إن النقطة x في مجموعة محدبة C نقطه حدية لـ C إذا تعذر كتابة x على شكل تركيب محدب فعلي بمعنى أنه:

إذا كان $\lambda \in (0,1)$ وكان $x_1, x_2 \in C$ وتحقق الشرط التالي:

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ فإن $x = x_1 = x_2$.

أي أن النقطة الحدية في مجموعة محدبة هي نقطة من المجموعة المحدبة لا يمكن لها أن تقع على قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين مختلفتين من نقاط المجموعة المحدبة.



▫ نقطة حدية
+ نقطة غير حدية

الشكل أعلاه يوضح بعض النقاط الحدية في مجموعة محدبة.

إذا كانت K منطقه مضلعة محدودة وكانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ هي نقاطها الحدية. عندئذ يمكن كتابة أي نقطه $x \in K$ على شكل تركيب محدب من النقاط الحدية.

انظر كتاب Taha[3] صفحة ٢٩٠ و Collatz L. and Wetterling W. [8].

(٣,٧) الحل الهندسي Geometric Solution

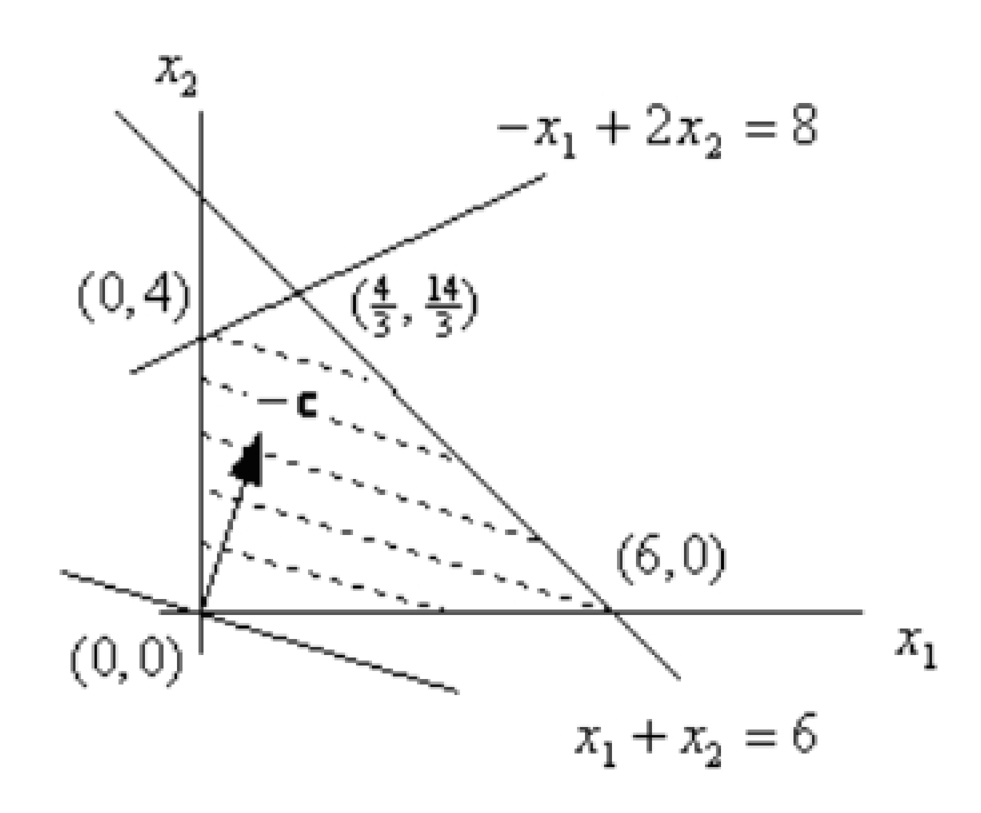
سنعالج في هذا الفصل حل البرامج الخطية البسيطة بطريقة هندسية، وهذه الطريقة سوف تساعد على فهم البرنامج الخطي وطريقة حلّه. سنورد في البداية مثالاً يوضح طريقة الرسم وسنشرح الخطوات التي يتم اتباعها.

مثال (٣,٧,١)

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

في البداية نحدد منطقة الحلول المسموح بها feasible solutions، وهي تلك التي تحقق المتباينات أو شروط البرنامج الخطي. لتحديد منطقة الحلول المسموح بها نرسم تلك المتباينات فنحصل على الشكل التالي:



إن المنطقة هي منطقة الحلول المسموح بها. إن الشرطين الأول والثاني يمثلان المنطقة الواقعة أسفل المستقيمين $-x_1 + 2x_2 = 8$ و $x_1 + x_2 = 6$ على الترتيب. لاحظ أن كل قيد من قيود البرنامج الخطي يمثل نصف فضاء. إن منطقة الحلول المسموح بها هي عبارة عن تقاطع أنصاف الفضاءات الممثلة لتلك المتباينات وهي منطقة مضلعة. إن الحل الأمثل هو الحل الذي يحقق جميع شروط البرنامج الخطي (أي أنه حل مسموح به) تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل ما يمكن. للحصول على الحل الأمثل نرسم المستقيم الممثل لدالة الهدف ذات القيمة الصفرية (يمر بنقطة الأصل)، ثم نأخذ مستقيمات موازية له تتحرك في اتجاه المتجه $-\mathbf{c}$ على ألاَّ تغادر هذه المستقيمات المنطقة المسموح بها (انظر المستقيمات المنقطة) فنكون قد حصلنا على الحل الأمثل عند

تقاطع المستقيمين الأول والثاني عند النقطة $(3/4, 3/14)$، وهي إحدى النقاط الحدية الأربعة.

مثال (٢ , ٧ , ٣)

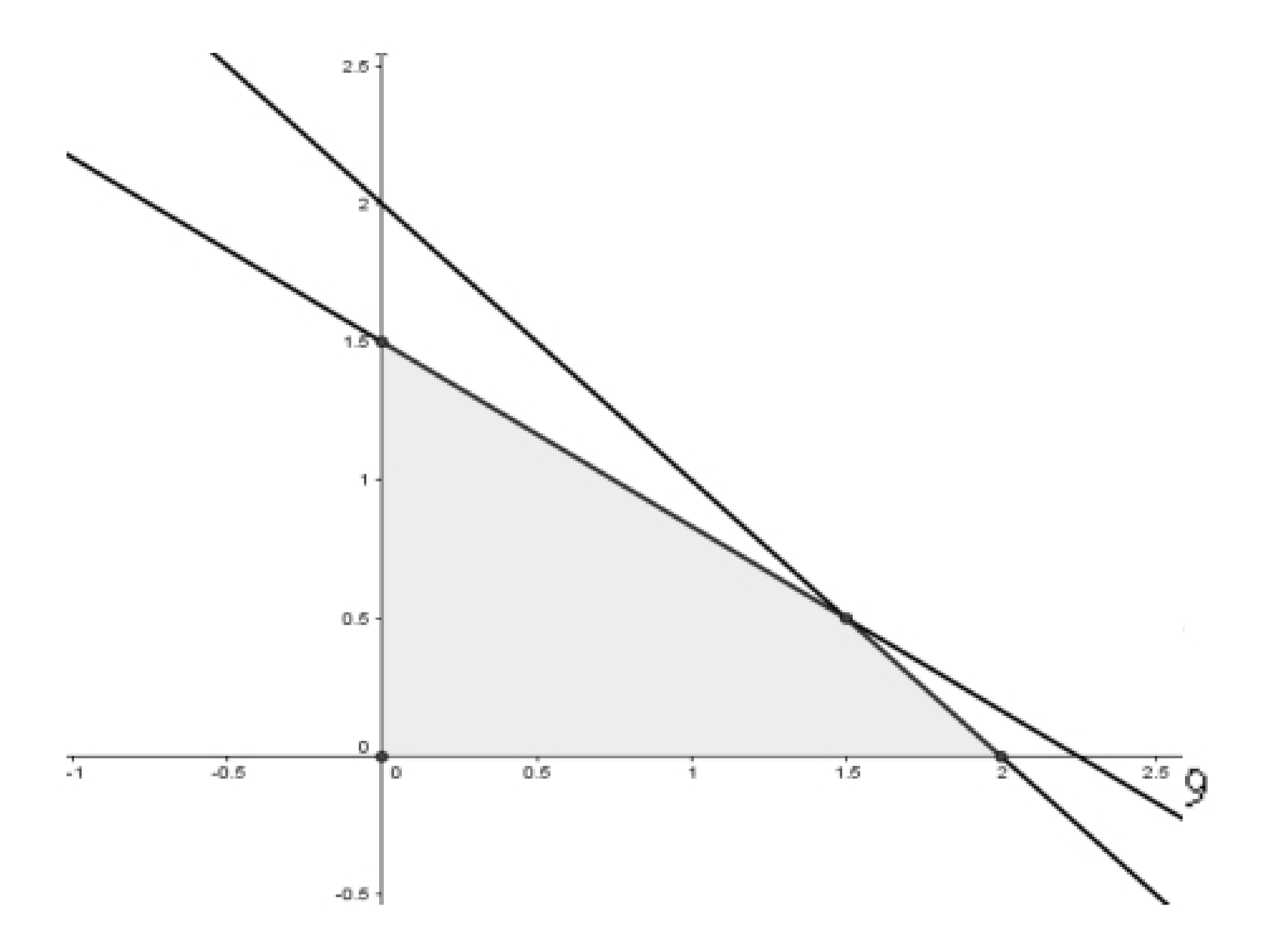
لدينا المنطقة المضلعة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 2 \\ 4x_1 + 6x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

أوجد النقاط الحدية. ثم أوجد الحل الأمثل هندسياً علماً أن دالة الهدف هي

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$ ،

إن الشكل الهندسي لهذا البرنامج الخطي يأخذ الشكل التالي:



إن المنطقة المضلعة هي المنطقة الواقعة بين المستقيمات الأربعة والمستقيم المتقطع يرمز إلى تزايد دالة الهدف، ومن الواضح أنه موازٍ للمستقيم الممثل بالشرط $4x_1 + 6x_2 \leq 9$، وبالتالي فإن هناك عدداً لانهائي من الحلول تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3/2,1/2)$ و $(0,1.5)$، لاحظ أن ميل المستقيم $4x_1 + 6x_2 = 9$ يساوي ميل دالة الهدف. النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية:

نظرية (٣,٧,٣) (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\max\ (or\ \min) \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{s.t.} \qquad \left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \begin{cases} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{cases} \\ &\qquad\qquad x_i \ge 0, \qquad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{3.3}$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل موجوداً عند نقطة حدية من هذه المنطقة.

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجوداً عند نقطة حدية من هذه المنطقة.

البرهان: (مقصور على المنطقة المحدودة)

لنفترض أن $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ هي النقاط الحدية للمنطقة المسموح بها K، ولنفترض أن هذه النقاط قد رقمت بحيث إن:

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}_i) \le f(\mathbf{x}_m) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.4}$$

علما أن f هي دالة الهدف للبرنامج الخطي. لنفترض أن $\mathbf{x} \in K$ نقطة اختيارية عندئذ يمكن كتابتها كتركيب محدب على النحو التالي:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m \tag{3.5}$$

حيث a_i أعداد غير سالبه، $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$.

إن:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m) \\ &= a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) \end{aligned} \tag{3.6}$$

وذلك لأن f دالة خطية وبما أن $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$ فإن :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1) &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)\, f(\mathbf{x}_1) \\ &= a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_1) \\ &\le a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) = f(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

كما أن:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) \\ &\le a_1 f(\mathbf{x}_m) + a_2 f(\mathbf{x}_m) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) \\ &= \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_m\right) f(\mathbf{x}_m) = f(\mathbf{x}_m) \end{aligned} \tag{3.8}$$

وعلى هذا فإن:

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_m) \tag{3.9}$$

لأية نقطه $\mathbf{x} \in K$ ، مما يعني أن دالة الهدف f تأخذ قيمتها العظمى عند النقطة الحدية $\mathbf{x}_m$ وتأخذ قيمتها الصغرى عند النقطة الحدية $\mathbf{x}_1$ وهذا يثبت النظرية.

لتطبيق هذه النظرية نأخذ المثال (١ , ٧ , ٣). من الممكن الحصول على الحل الأمثل بعد الحصول على جميع النقاط الحدية في المنطقة المضلعة، ومن ثم بتعويض هذه النقاط في دالة الهدف:

$$z_0 = -1 \times 0 - 3 \times 0 = 0$$
$$z_A = -1 \times 6 - 3 \times 0 = -6$$
$$z_B = -1 \times 4/3 - 3 \times 14/3 = -46/3$$
$$z_c = -1 \times 0 - 3 \times 4 = -12$$

من الواضح أن النقطة B تعطي أقل قيمة لدالة الهدف. إن جميع الحلول المسموح بها تقع في منطقة محدبة، في هذا المثال المنطقة محدودة، وقد تكون في بعض الحالات غير محدودة وقد يكون الحل في هذه الحالة غير نهائي، إن أي حل أمثلي لابد أن يكون عند أحد النقاط الحدية. في بعض الحالات قد يكون الحل الأمثل غير وحيد، وذلك عندما يكون ميل دالة الهدف مساويا لميل أحد مستقيمات الشروط. أخيراً قد لا يوجد حل للبرنامج الخطي، وذلك عندما تكون منطقة الحلول المسموح بها خاليه.

كذلك من الممكن تطبيق النظرية على مثال (٢ ,٧ ,٣)، ومن ثم حساب قيم النقاط الحدية، ومن ثم بتعويضها في دالة الهدف.

(٣,٨) نظرة تمهيدية جبرية للبرنامج الخطي وطريقه السمبلكس

Algebraic view For Linear Program and Simplex Method

حتى الآن كانت دراستنا مقصورة على الحل الهندسي للبرنامج الخطي، ومن الواضح أن هذه الطريقة محدودة بالمسائل البسيطة حيث عدد المتغيرات ثلاثة أو أقل. إن طريقه السمبلكس والتي سوف نعطي تفصيلاً كاملاً لها في الباب القادم هي طريقة جبرية أكثر فعالية لحل البرنامج الخطي. سوف ندرس في هذا الفصل بعض الأساسيات الجبرية والتي سوف تستخدم في طريقه السمبلكس.

نظام المعادلات الخطي هو مجموعة من m من المعادلات الخطية في n مجهول كالتالي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.10}$$

حيث $m \le n$. يكتب هذا النظام بشكل مصفوفي على النحوا الآتي:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.11}$$

من المعلوم (وفقا لطريقة Gauss) أنه إذا كان، في المصفوفة $\mathbf{A}$ ، m عموداً مستقلاً خطياً فإنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق على الشكل القياسي الآتي canonical form:

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & & +y_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{1,n}x_n & = y_{1,0} \\ & x_2 & & +y_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{2,n}x_n & = y_{2,0} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & x_m & + y_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{m,n}x_n & = y_{m,0} \end{array}$$

مثال (١ , ٨ , ٣)

النظام التالي هو نظام قياسي:

$$2x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 + 0x_5 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0x_5 = 2$$
$$4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 + x_5 = -3$$

إن المتغيرات x_2, x_3, x_5 تسمى المتغيرات الأساسية حيث معامل x_3 يساوي واحداً في المعادلة الأولى، وصفراً في باقي المعادلات، وكذلك معامل x_2 يساوي واحداً في المعادلة الثانية، وصفراً في باقي المعادلات، وكذلك معامل x_5 يساوي واحداً في المعادلة الثالثة، وصفراً في باقي المعادلات.

إن مغزى الصياغة القياسية لنظام معادلات خطية هو أنه من الممكن الحصول على حل لهذا النظام بسهولة، وذلك بجعل المتغيرات غير الأساسية في الصياغة القياسية تساوي الصفر، وبجعل المتغيرات الأساسية تأخذ قيم الطرف الأيمن. في المثال (١ , ٨ , ٣) إذا جعلنا المتغيرات غير الأساسية x_1 و x_4 تساوي الصفر فإننا نجد أن $x_2 = 2, x_3 = 6$ و $x_5 = -3$، وبذا نحصل على الحل $(0,2,6,0,-3)$ لنظام المعادلات في المثال (١ , ٨ , ٣).

الحل الأساسي لنظام معادلات من الشكل القياسي هو الحل الذي تكون فيه المتغيرات غير الأساسية مساوية للصفر، و المتغير الأساسي يأخذ قيمة الطرف الأيمن للمعادلة.

سوف نرى في الباب القادم، وذلك عند استخدام طريقة السمبلكس، كيف نستخدم المعادلات الخطية بالصياغة القياسية بشكل متكرر. وفي كل مرحلة يكون هناك حل أساسي يؤدي في النهاية بنا إلى الحل الأمثل، وذلك إن وجد.

إن عملية الاختزال أو المحورية pivoting هي التي تحولنا من نظام معادلات قياسي إلى آخر، وبالتالي من حل أساسي إلى آخر. سوف نبين هنا عمليات الاختزال على الصف في النظام (3.10):

أولا: ضرب أي معادلة من (3.10) في ثابت غير صفري k

$$\begin{aligned} a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s \\ ka_{s1}x_1 + ka_{s2}x_2 + \cdots + ka_{sn}x_n &= kb_s \end{aligned} \tag{3.12}$$

ثانيا: ضرب معادلة من (3.10) ولتكن

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r$$

في ثابت k و إضافتها إلى معادلة أخرى

$$\begin{aligned} a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s \\ (ka_{r1} + a_{s1})x_1 + \cdots + (ka_{rn} + a_{sn})x_n &= kb_r + b_s \end{aligned} \tag{3.13}$$

إن المثال التالي يوضح عمليات الاختزال وكذلك العنصر المحوري.

مثال (٣,٨,٢)

سوف نستخدم في هذا المثال عمليات الاختزال لنبين أن النظام:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1/2\, x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \qquad (3.14)$$

والنظام:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_2 \qquad\quad &= 19/6 \\ -2x_2 \quad +x_3 \quad &= 17/3 \end{aligned} \qquad (3.15)$$

متكافئان، لاحظ أن النظام (3.15) من النمط القياسي. في البداية سوف نجعل المتغير x_1 أساسي، وذلك بضرب المعادلة الأولى من (3.14) في -2 وإضافتها إلى المعادلة الثانية فنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1/2\, x_3 &= 6 \\ 6x_2 - 3x_3 &= -17 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

والذي يعطي المتغير الأساسي x_1. الآن نجعل x_3 أساسياً، وذلك بضرب المعادلة الثانية من (3.16) في $-1/3$ فنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1/2\, x_3 &= 6 \\ -2x_2 + x_3 &= 17/3 \end{aligned} \qquad (3.17)$$

ومن ثم ضرب المعادلة الثانية من (3.17) في $-1/2$ وإضافتها إلى المعادلة الأولى فنحصل على:

$$x_1 - x_2 \qquad = 19/6 \tag{3.18}$$
$$-2x_2 + x_3 = 17/3$$

وهو نفس النظام (3.15). في العمليات المحورية في المثال (٢ , ٨ , ٣) اخترنا معادلة، ومن ثم متغيراً ليكون متغيراً أساسياً. إن معامل هذا المتغير الأساسي يسمى العنصر المحوري ففي المثال السابق كان 1 هو العنصر المحوري لـ x_1 و -3 هو العنصر المحوري لـ x_3.

إن استخدام المصفوفات أكثر ملاءمة لعمل العمليات المحورية من نظام المعادلات؛ وذلك لأن العمليات المحورية تستخدم فقط معاملات المتغيرات، وبالتالي من الممكن أن نستبدل نظام المعادلات بالمصفوفة التي تحوي هذه المعاملات. إن موقع كل عنصر في المصفوفة يقابل موقع المعامل للمتغيرات في نظام المعادلات. سوف نضع النظام (3.14) على شكل مصفوفة ونضع الطرف الأيمن للنظام في العمود الأخير من المصفوفة والعنصر بين قوسين هو العنصر المحوري:

$$\begin{bmatrix} (1) & -2 & 1/2 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

من هذه المصفوفة نحصل على المصفوفة التالية وهي تقابل النظام (3.16):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/2 & 6 \\ 0 & 6 & (-3) & -17 \end{bmatrix}$$

العنصر بين قوسين هو العنصر المحوري وبعد إجراء العمليات المحورية نحصل على المصفوفة التالية وهي تقابل النظام (3.17):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 17/3 \end{bmatrix}$$

ثم نجعل العناصر في العمود المحوري المقابل للعنصر المحوري أصفاراً فنحصل على المصفوفة التالية وهي تقابل النظام (3.18):

$$.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 19/6 \\ 0 & -2 & 1 & 17/3 \end{bmatrix}$$

(٣, ٩) الصياغة القياسية للبرنامج الخطي

Standard form for linear programming

لاحظنا من النماذج السابقة أن الغرض من البرمجة الخطية هو إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة خطية (تدعى داله الهدف) تخضع متغيراتها لشروط خطية على شكل متباينات أو معادلات. ومهما اختلفت صياغة البرنامج الخطي فإنه يمكن التعبير عنه في كل الأحوال بالصياغة القياسية الآتية:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{3.20}$$

ونعني بذلك أن نظام المعادلات (3.20) قياسياً (انظر الفصل ٣,٨)، المعاملات a_{ij}, b_j, c_i هي أعداد ثابتة، بينما x_i هي المتغيرات التي يراد تعيينها. ومن الممكن التعبير عن الصياغة القياسية (3.20) بشكل مختصر على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ملاحظه: اذا كانت دالة الهدف تعظيمية (.max) فيمكن إعادتها إلى دالة هدف تصغيرية (.min)، وذلك بجعل $g(x) = -f(x)$.

مثال (٣,٩,١)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الذي يمكن تحويله للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z' = -3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

إن اعظم قيمة لـ z تقابل أصغر قيمة لـ z' فأعظم قيمة لـz تساوي سالب أصغر قيمة لـz'. وللمسألتين الحل الأمثل نفسه.

(٣,١٠) الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي

Non Canonical form for linear programming

قبل الشروع في دراسة المسألة المعروضة نود أن نستعرض أشكالاً أخرى غير قياسية ونوضح كيفية إعادتها إلى الشكل القياسي:

المتغيرات المكملة The Slack Variables

إذا كان البرنامج الخطي مصاغاً على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
&\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \le b_1 \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \le b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \le b_m \\
&x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

فإنه يمكن إعادته إلى الشكل القياسي، وذلك بإدخال متغيرات جديدة

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$$

ندعوها متغيرات إضافية فتتحول المتباينات إلى معادلات مما يجعل عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات، وبالتالي لا يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات السابقة، ويكون الشكل الجديد للبرنامج الخطي كما يلي:

$$\begin{aligned}
&\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
&x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n+m
\end{aligned}$$

المتغيرات الزائدة Surplus Variables

هي حاله معاكسة للحالة السابقة ويكون البرنامج الخطي المصاغ على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
&\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
&x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

هذا البرنامج يمكن إعادته إلى الشكل القياسي بإدخال متغيرات جديده نسميها متغيرات زائدة، وذلك كما يلي:

$$\begin{aligned}
&\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n+m$$

المتغيرات الحرة Free Variables

إذا كان البرنامج الخطي مكتوباً بالصياغة القياسية إلا أن أحد المتغيرات x_j لم يفترض فيه أن يكون غير سالب أي أنه متغير حر، فهناك طريقة لتحويله إلى الصيغة القياسية نستعرضها فيما يلي:

يمكن استبدال المتغير x_j بمتغيرين جديدين غير سالبين μ_j, ν_j، وذلك بأن نكتب:

$$x_j = \mu_j - \nu_j,$$

وبالتالي فإن البرنامج الخطي الآن ممثل بالمتغيرات الـ $n+1$ وهي:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \mu_j, \nu_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$$

وذلك بعد حذف x_j وإضافة المتغيرين μ_j, ν_j غير السالبين إلى البرنامج الخطي.

تمارين الباب الثالث

(٣ , ١) اعتبر المنطقة المضلعة التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 1 \\ 8x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

أوجد النقاط الحدية.

(٣, ٢) في التمرين السابق إذا علمت أن:

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

هي دالة الهدف أوجد الحل الأمثل هندسياً.

(٣, ٣) باستخدام واحد من المعادلات الـ m والتي معامل x_j فيها لا يساوي الصفر على سبيل المثال:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

أوجد طريقة أخرى للتخلص من المتغير الحر x_j.

(٣, ٤) أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_3 = 3 \end{aligned}$$

(٣, ٥) أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 4 \leq x_1 + x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(٣ , ٦) أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} & \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(٣ , ٧) حل البرنامج في التمرين (٢ , ٢) هندسياً.

(٣ , ٨) أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} & \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ & x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 1 \end{array}$$

(٣ , ٩)حل البرنامج التالي هندسياً:

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \\ -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(٣, ١٠) عرف مايلي النقطة الحرجة، المنطقة المضلعة، ثم بيِّن كيف نغير في المتغيرات الحرة لنحول البرنامج الخطي إلى الصورة القياسية.

(٣, ١١) إثبت أنه إذا كانت المنطقة المسموح بها للبرنامج الخطي

$$\min\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل متواجد عند نقطة حرجة (حدية) من هذه المنطقة.

الفصل الرابع

طريقة السمبلكس
Simplex Method

(٤ , ١) مقدمة Introduction

سندرس في هذا الباب طريقة السمبلكس بشكل مفصل، حيث سندرس في البداية بعض المفاهيم الأساسية التي تمهد لطريقة السمبلكس مع بعض النظريات المتعلقة بها. ثم ندرس في الفصل الثالث من هذا الباب كيفية بناء خوارزمية السمبلكس وكيفية اختيار المتجه الداخل والخارج والعمليات المحورية، ثم نعطي عدة أمثلة لبرامج خطية، إما أن تكون دالة الهدف فيها غير محدودة أو أن يكون الحل فيها غير وحيد. ثم ندرس في الفصل الرابع حالة البرنامج غير المنتظم وكيف نتخلص من هذه المشكلة باستخدام قاعدة بلاند. وفي الفصل الخامس ندرس طريقة حل البرنامج الخطي بالمرحلتين وهذه الطريقة نستخدمها عندما لا يكون للبرنامج الخطي حل ابتدائي واضح، حيث نستخدم المرحلة الأول لإيجاد الحل الابتدائي. ثم نشرح في الفصل السادس طريقة السمبلكس المحسنة، وهذه الطريقة تقوم بترتيب عمليات السمبلكس بشكل يتجنب حساب وتخزين المعلومات غير الضرورية.

(٤,٢) مفاهيم أساسية Basic concepts

سندرس في هذا الفصل الحل الأساسي المسموح به، وسنرى كيف أن كل حل أساسي مسموح به تقابله نقطة حدية من المنطقة المسموح بها كما سنوضح ذلك بمثال.
ليكن لدينا نظام المعادلات:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{4.1}$$

حيث $\mathbf{x}$ متجه له n مركبة و $\mathbf{b}$ متجه له m مركبة و $\mathbf{A}$ مصفوفة المعاملات من النوع $m \times n$ $(m < n)$. ولنفترض (للتبسيط) أن رتبة $\mathbf{A}$ $=$ رتبة $(\mathbf{A},\mathbf{b}) = m$ وأن المتجهات الـ m الأولى من المصفوفة $\mathbf{A}$ هي متجهات مستقلة خطيا. إذا لم تكن رتبة $\mathbf{A}$ $= m$ فإن النظام $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ إما أن يكون غير قابل للحل أو أن بعضاً من معادلاته ينتج عن المعادلات الأخرى، وبالإمكان الاستغناء عنها. وتكون رتبة المصفوفة الجديدة مساوية لعدد صفوفها.

إن طريقة السمبلكس تعتمد في حلها لمسألة البرنامج الخطي على توليد متوالية من الحلول المسموح بها والتي تنتهي عند الحل الأمثل. إن منطقة الحل تحوي عدداً من النقاط الحدية، والحل عند كل دورة iteration هو عبارة عن نقطة حدية (النقاط الحدية هي عبارة عن أركان منطقة الحل المسموح به)، وبالتالي فإن $n-m$ من المتغيرات تأخذ قيما صفرية وتدعى المتغيرات غير الأساسية nonbasic variables والمتغيرات الـ m الباقية لها قيم غير سالبة وتدعى المتغيرات الأساسية basic variables. تعمل طريقة السمبلكس على تغيير منتظم متبادل بين المتغيرات الأساسية وغير الأساسية كي نصل إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى.

يتم التوصل للحل الأمثل بعدد محدود من الخطوات بحيث تتناقص قيمة دالة الهدف في كل خطوة عن الخطوة التي سبقتها.

نجزئ المصفوفة $\mathbf{A}$ على الشكل

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}] \tag{4.2}$$

حيث $\mathbf{B}$، المصفوفة الأساسية، هي من النوع $m \times m$ و $\mathbf{N}$ المصفوفة غير الأساسية، هي من النوع $m \times (n-m)$. بالتالي يكون لنظام المعادلات $\mathbf{B}\mathbf{x_B} = \mathbf{b}$ حل وحيد حيث $\mathbf{x} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N})$ و $\mathbf{x_B}$ له m مركبة ويكون المتجه $\mathbf{x} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{0})$ حلا للنظام $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

نعطي الآن تعريفاً للحل الأساسي المسموح به basic feasible solution موضحين المتغيرات الأساسية وغير الأساسية:

تعريف (٤,٢,١)

يدعى المتجه $\mathbf{x} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N})$ حيث $\mathbf{x_N} = \mathbf{0},\ \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ حلا أساسيا بالنسبة لنظام المعادلات (4.1). وإذا كان $\mathbf{x_B} \geq 0$ فإن $\mathbf{x}$ يدعى حينئذ حل أساسي مسموح به. أما مركبات المتجه $\mathbf{x_B}$ تدعى المتغيرات الأساسية أما مركبات المتجه $\mathbf{x_N}$ فتدعى المتغيرات غير الأساسية. إذا كان أحد مركبات المتجه $\mathbf{x_B}$ مساوياً الصفر فإننا ندعو $\mathbf{x}$ حينئذ حلا غير نظامي.

إن فكرة الحل الأساسي المسموح به موضحة في المثال التالي:

مثال (٢ , ٢ , ٤)

لتكن لدينا المنطقة المضلعة المعرّفة بالمتباينات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

إن هذه المتباينات بعد إدخال المتغيرين الإضافيين x_3 و x_4 تتحول إلى نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_2 \quad + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

لاحظ أن مصفوفة القيود هي:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

العمودان $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ لم يستخدما لتوليد مصفوفة أساسية؛ لأنهما مرتبطان خطياً. من خلال التعريف (١ , ٢ , ٤) نود التعرف على الإمكانات المختلفة للمصفوفات الأساسية والحلول الأساسية المقابلة لها:

١- $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$

٢- $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4]$

٣- $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$

٤- $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4]$

٥- $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$

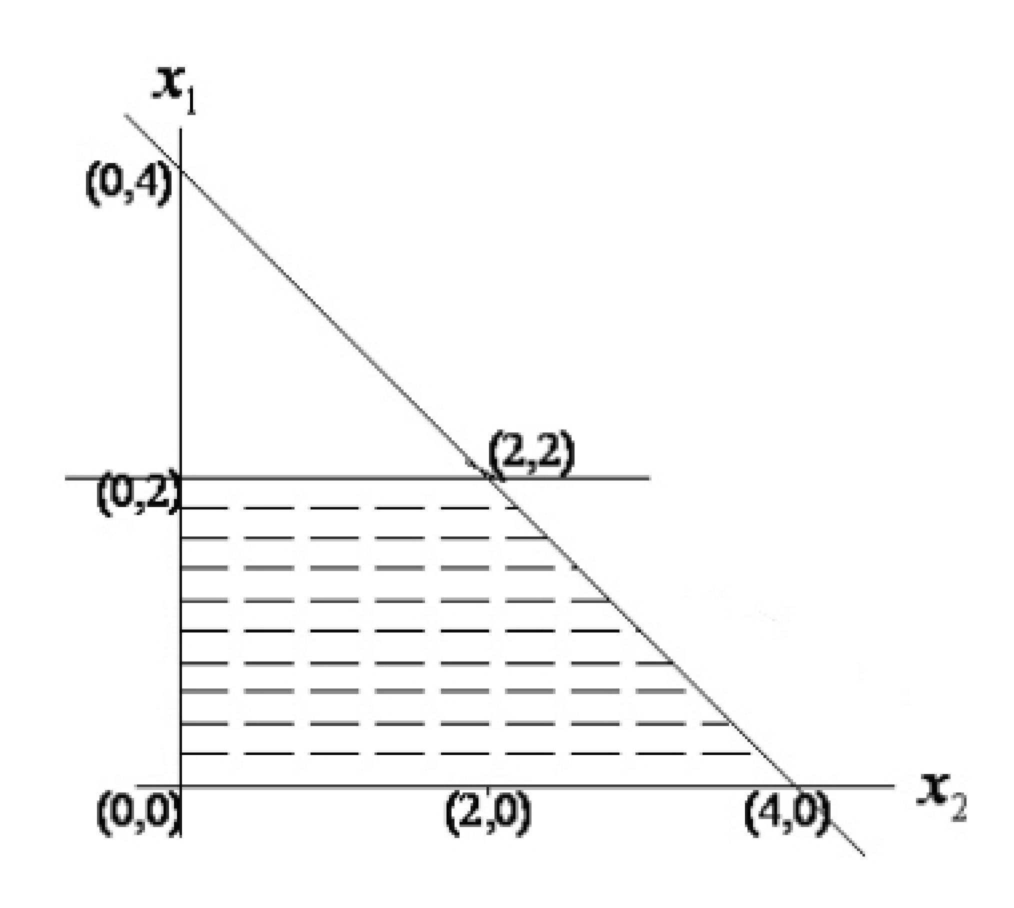
لاحظ أن الحلول التي حصلنا عليها، ماعدا الحل الرابع، هي حلول أساسيه مسموح بها أما الحل الرابع فهو أساسي، ولكنه غير مسموح به. إذن فالحلول الأساسية المسموح بها بالنسبة لنظام المعادلات السابق هي:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

هذه النقاط تنتمي إلى الفضاء R^4. وعندما نستبعد المتغيرات الاضافية، أي عند إسقاط الحل الأساسي المسموح به على الفضاء R^2 نحصل على النقاط الأربع الآتية في المستوى:

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

وهي تمثل النقاط الحدية للمنطقة المحدبة المحددة بالمتباينات (4.2) والموضحة في الشكل التالي:



هذه النقاط هي النقاط الحدية لمنطقة الحل المسموح به، هذا وقد سبق لنا أن ذكرنا في الباب السابق أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي إنما يقع عند إحدى النقاط الحدية هذه.

من الواضح في هذا المثال أن عدد الحلول الأساسية المسموح بها المحتملة محدوده بعدد الطرق التي نختار فيها العمودين المستقلين خطياً من الأعمدة الأربعة في المصفوفة **A** . وبالتالي فإن عدد الحلول الأساسية المسموح بها أقل من أو تساوي:

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$$

ونستبعد من هذه الإمكانات الست واحدا؛ ذلك لأنه غير مسموح به. ثم إن العمودين $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_3$ لم يستخدما لتوليد مصفوفة أساسية ذلك لأنهما مرتبطان خطيا. وبالتالي فإننا نحصل على أربعة حلول أساسية مسموح بها. وبشكل عام فإن عدد الحلول الأساسية المسموح بها أقل من أو تساوي:

$$.\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{4.4}$$

هنا طريقة أخرى لرؤية الحلول الأساسية والحلول الأساسية المسموح بها، إن كل قيد من قيود البرنامج الخطي من الممكن أن يرافق متغير محدد. فالقيد $x_1 \geq 0$ من الممكن أن يرافق x_1، والمستقيم $x_1 = 0$ هو حد نصف الفضاء المقابل لـ $x_1 \geq 0$. أيضا $x_1 + x_2 \leq 4$ من الممكن أن يرافق x_3، والمستقيم $x_1 + x_2 - 4 = x_3 = 0$ هو حد نصف الفضاء المقابل لـ $x_1 + x_2 \leq 4$. الشكل السابق يبين أنصاف الفضاءات الأربع، إن تقاطع كل مستقيمين يمثل حلاً أساسياً، أما المستقيمات فتمثل حلولاً غير أساسية. من الشكل يتضح أن هناك خمس تقاطعات تمثل خمسة حلول أساسية، لاحظ أن المستقيمين $x_4 = 0$ و $x_2 = 0$ متوازيان أي أنه لا يوجد نقطة تقاطع بينهما، وبالتالي لا يوجد حل أساسي مقابل لهذين المتغيرين. وبعد تحديد منطقة الحل المسموح به نستطيع التفريق بين الحلول الأساسية والحلول الأساسية المسموح بها.

في المثال التالي نبين فكرة الحل غير النظامي degenerate solution.

مثال (٣ , ٢ , ٤)

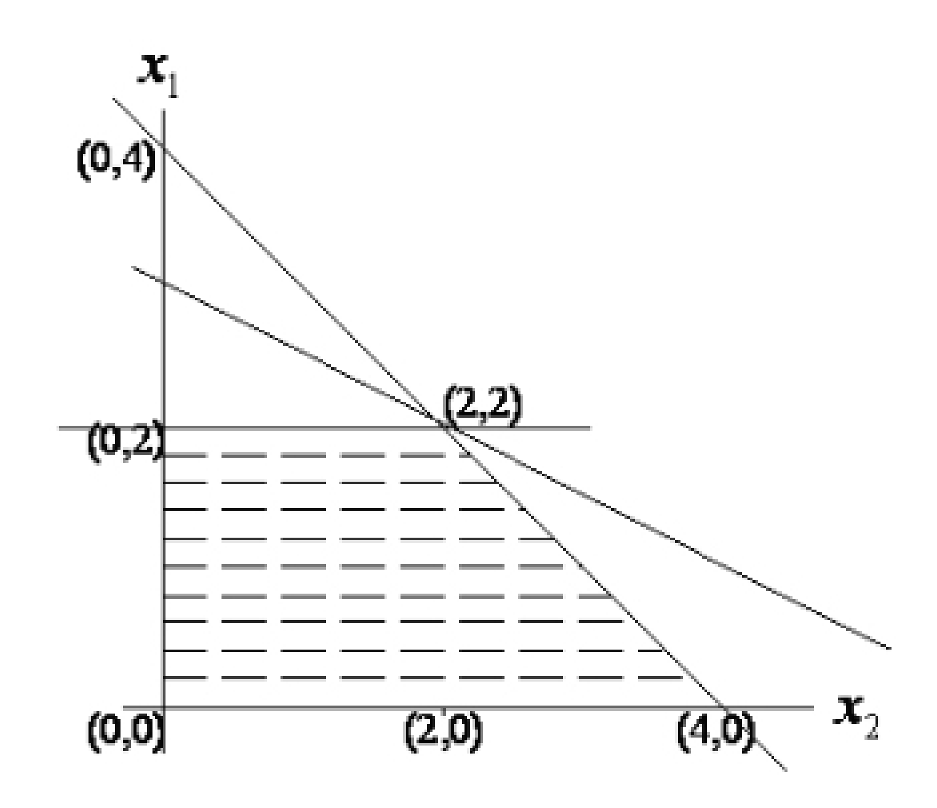
لتكن لدينا المنطقة المضلعة المعرفة بالمتباينات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن هذه المتباينات تتحول، بعد إدخال المتغيرات المكملة x_3 ، x_4 و x_5 إلى نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 6 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن النظام السابق موضح في الشكل التالي، إن منطقة الحل المسموح بها هي نفس منطقة الحل في المثال(٢ , ٢ , ٤) السابق؛ وذلك لأن القيد $x_1 + 2x_2 \le 6$ الجديد زائد.



إن مصفوفة القيود هي:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على الحل الأساسي المسموح به التالي المقابل للمصفوفة $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن الحل الأساسي المسموح به السابق غير نظامي؛ وذلك لأن $x_3 = 0$. بشكل مشابه نحصل على الحل الأساسي المسموح به التالي المقابل للمصفوفة $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4]$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن هذا الحل الأساسي المسموح به هو نفس الحل الأساسي المسموح به السابق عندما كانت $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$، كذلك لو بحثنا عن الحل الأساسي المسموح به المقابل للمصفوفة $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5]$ لحصلنا على:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن جميع الحلول الثلاثة السابقة، وإن كانت مصفوفتها الأساسية مختلفة إلا أنها ممثلة بالنقطة الحدية $(2,2,0,0,0) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. إن هذه الحلول الثلاثة الأساسية المسموح بها غير نظامية تحتوي على متغير أساسي مساوٍ للصفر.

إن هذا المثال والمثال السابق أظهرا بشكل جلي الارتباط الوثيق بين الحلول الأساسية المسموح بها بالنسبة لنظام المعادلات وبين النقاط الحدية للمنطقة المحدبة المحددة بالمتباينات. نبرهن فيما يلي أن مجموعة النقاط الحدية مكافئ لمجموعة الحلول الأساسية المسموح بها.

هذا وقد سبق أن لاحظنا الارتباط الوثيق بين النقاط الحدية وبين المتجهات المستقلة خطياً. نعبر عن هذا الارتباط من خلال النظرية التالية التي نوردها بدون برهان.

نظرية (٤ , ٢ , ٤)

لتكن $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ نقطة في المنطقة المسموح بها K. تكون $\mathbf{x}$ نقطة حدية لـ K إذا وإذا فقط كانت مجموعة أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$ التابعة للمركبات الموجبة x_k مستقلة خطياً.

نظرية (٥ , ٢ , ٤)

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m\times n$ رتبتها تساوي m. ولتكن K المجموعة المحدبة المكونة من المتجهات $\mathbf{x}$ التي تحقق الشروط الآتية:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\qquad \mathbf{x}\geq\mathbf{0} \tag{4.5}$$

تكون النقطة $\mathbf{x}$ حدية بالنسبة للمجموعة المحدبة K إذا وإذا فقط كانت $\mathbf{x}$ حلاً أساسياً مسموحاً به.

البرهان

ليكن $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_m,0,\dots,0)$ حلاً أساسياً مسموحاً به لنظام (4.5) عندئذ يتحقق ما يلي:

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_m\mathbf{a}_m=\mathbf{b}$$

حيث إن $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_m$ (المتجهات الأول من المصفوفة $\mathbf{A}$) مستقلة خطياً.

لنفرض جدلا أن النقطة $\mathbf{x}$ ليست نقطه حدية، إذن يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in K \qquad \mathbf{y} \neq \mathbf{z}$$

بما أن $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ حلول مسموح بها، فبالتالي جميع مركبات تلك المتجهات غير سالبه، وبما أن $0 < \lambda < 1$، لذا فالمركبات الأخيرة للمتجهين $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ (والتي عددها يساوي $n-m$) تساوي الصفر. وعلى هذا فإن:

$$\begin{aligned} y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_m\mathbf{a}_m &= \mathbf{b} \\ z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + \cdots + z_m\mathbf{a}_m &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

إذن

$$(y_1 - z_1)\mathbf{a}_1 + (y_2 - z_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (y_m - z_m)\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

بما أن المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ مستقلة خطيا، إذن:

$$y_i - z_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

وبالتالي فإن $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$، وهنا يظهر التناقض، وعلى هذا فإن $\mathbf{x}$ نقطة حدية للمجموعة المحدبة K. وبالعكس نفترض أن النقطة $\mathbf{x}$ نقطة حدية للمجموعة المحدبة K. سنبين الآن أنها حل أساسي مسموح به للنظام (4.5). لنفترض أن المركبات غير الصفرية للمتجه $\mathbf{x}$ هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$ إذن:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}, \qquad x_i > 0 \quad i = 1,\ldots,k \tag{4.6}$$

لكي نبين أن $\mathbf{x}$ حل أساسي مسموح به، علينا أن نثبت أن المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ مستقلة خطياً. لو كانت المتجهات مرتبطة خطياً لتحققت العلاقة الآتية:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

دون أن تكون جميع قيم الـ y_i صفرية. لنعرف المتجه $\mathbf{y}$ كما يلي:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$$

بما أن $1 \le i \le k \quad x_i > 0$ إذن يمكن اختيار $\varepsilon > 0$ بحيث إن:

$$\mathbf{x} + \varepsilon\ \mathbf{y} \ge 0, \qquad \mathbf{x} - \varepsilon\ \mathbf{y} \ge 0$$

لاحظ أن الهدف من اختيار ε على هذا النحو هو أن نضمن بذلك وجود النقطتين $\mathbf{x} + \varepsilon\ \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} - \varepsilon\ \mathbf{y}$ في المجموعة المحدبة K.

من(4.6) و (4.7) نحصل على:

$$\left(x_1 - \varepsilon\ y_1\right)\mathbf{a}_1 + \left(x_2 - \varepsilon\ y_2\right)\mathbf{a}_2 + \cdots + \left(x_k - \varepsilon\ y_k\right)\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$
$$\left(x_1 + \varepsilon\ y_1\right)\mathbf{a}_1 + \left(x_2 + \varepsilon\ y_2\right)\mathbf{a}_2 + \cdots + \left(x_k + \varepsilon\ y_k\right)\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

إذن $\mathbf{x} + \varepsilon\ \mathbf{y} \in K, \quad \mathbf{x} - \varepsilon\ \mathbf{y} \in K$ ولكن:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \varepsilon\ \mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \varepsilon\ \mathbf{y})$$

لذا فقد أمكن كتابة $\mathbf{x}$ على نحو يتعارض مع تعريف النقطة الحدية للمجموعة المحدبة K . وهذا يناقض الفرض، وبالتالي فإن $\mathbf{x}$ حل أساسي مسموح به للنظام (4.5). وبهذا ينتهي برهان النظرية.

لاحظ أن كل حل أساسي مسموح به يكافئ نقطة حدية (وفقاً للنظرية السابقة)، ولكن قد يوجد أكثر من حل أساسي مسموح به مقابل لنفس النقطة الحدية، وهذه الحالة تحدث عند وجود حلول غير منتظمة كما شاهدناها في المثال(٣ , ٢ , ٤).

لاحظنا من خلال الدراسة السابقة أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي إنما يقع عند نقطة حدية للمنطقة المحدبة المحدودة بالمتباينات. كما بينت النظرية الأخيرة التقابل ببين النقط الحدية للمنطقة المحدبة وبين الحلول الأساسية لنظام المعادلات. نستدل من ذلك على أن البحث عن الحل الأمثل للبرنامج الخطي ينبغي أن يتم من خلال الحلول الأساسية لنظام المعادلات التابع للبرنامج الخطي. تبين النظرية التالية أن المنطقة المضلعة K المبينة في (4.5) لابد أن تحوي على الأقل حلاً أساسياً مسموحاً به واحداً، وذلك إذا كانت غير خالية.

نظريه (٥ , ٢ , ٤) (النظرية الأساسية للبرمجة الخطية)

لدينا المنطقة المضلعة الآتية:

$$K = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

حيث $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m \times n$ رتبتها تساوي m.

١- إذا كان للبرنامج الخطي حل مسموح به فهناك أيضاً حل أساسي مسموح به.

٢- إذا كان للبرنامج الخطي حل امثلي مسموح به فهناك أيضا حل امثلي أساسي مسموح به.

البرهان

١- لتكن $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ هي أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$ وليكن $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حلاً مسموحاً به. إن هذا الحل يحقق النظام الآتي:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

لنفرض أن عدد المتغيرات الموجبة في الحل المسموح به يساوي p وأن هذه المتغيرات هي $x_1, x_2, \ldots, x_p$ إذن:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \qquad (4.8)$$

فيكون لدينا الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى: المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ مستقلة خطياً.

إذا كانت $p = m$ فإن الحل يكون أساسياً. أما إذا كانت $p < m$ فعندئذ يمكن أن نجد $m - p$ متجهاً من المتجهات المتبقية بحيث يصبح لدينا m متجهاً مستقلاً. نعطي المتغيرات المقابلة لهذه المتجهات قيماً صفرية فنحصل بذلك على حل أساسي مسموح به غير نظامي.

الحالة الثانية: المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ مرتبطة خطياً.

في هذه الحالة توجد أعداد $y_1, y_2, \ldots, y_p$ أحدها على الأقل موجب بحيث إن:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

من المعادلتين (4.8) و (4.9) نحصل على:

$$\left(x_1 - \varepsilon\ y_1\right)\mathbf{a}_1 + \left(x_2 - \varepsilon\ y_2\right)\mathbf{a}_1 + \cdots + \left(x_p - \varepsilon\ y_p\right)\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

بما أن أحد قيم y_i موجب، لذا فإن أحد هذه الأقواس على الأقل سيتناقص مع تزايد قيمة ε . وبإمكاننا زيادة قيمة ε بحيث يصبح أحد هذه الأقواس مساوياً الصفر، فإذا اخترنا:

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_i}, \quad y_i > 0\right\}$$

فإن $\mathbf{x} - \varepsilon\ \mathbf{y}$ يكون حلاً مسموحاً به وعدد متغيراته الموجبة $p-1$ على الأكثر. نكرر ما سبق إلى أن نحصل على حل مسموح به تكون المتجهات المقابلة له مستقلة خطياً، وبذا نعود للحالة الأولى.

٢- بما أن البرنامج الخطي الذي يتمتع بحل أمثلي عند نقطة حدية، لذا فإن لهذا البرنامج الخطي حلاً أمثلياً أساسياً مسموحاً به.

(٣ , ٤) خوارزمية السمبلكس Simplex algorithm

لنفرض أن البرنامج الخطي مصاغ بالشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.10}$$

من الواضح أنه يمكننا إيجاد جميع حلول النظام $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ثم إهمال تلك الحلول التي لا تحقق الشرط $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$، وتعويض الحلول المتبقية في دالة الهدف، ومن ثم اختيار الحل الأمثل الذي يعطينا القيمة الصغرى. إلا أن عدد الحلول الممكنة كما هو واضح من الصيغة (4.4) هو عدد كبير حتى لأرقام صغيره. فعلى سبيل المثال إذا كان

$$m = 10, \quad n = 20 \text{ فإن: } \binom{20}{10} = 184756$$

وهذا يظهر جلياً عدم فعالية هذه الطريقة لحل المسائل العملية. إن حل المسألة (4.10) حلاً عملياً يتم باستخدام طريقة السمبلكس والتي تبدأ بحل أساسي مسموح به ثم نعمل على إيجاد حل أساسي آخر مسموح به تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل من قيمتها عند الحل السابق. بمعنى إنها تقوم بالانتقال من حل إلى آخر محافظه على الشرط $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ وبحيث نجعل قيمة دالة الهدف تتناقص حتى تصل إلى قيمتها الصغرى.

نفترض مبدئياً أن هناك حلاً أساسياً ابتدائياً مسموحاً به (سنوضح فيما بعد كيفية الحصول على هذا الحل). وسنقوم فيما يلي بشرح للخطوات التي تؤدي للحل الأمثل.

خوارزمية (١ , ٣ , ٤) (خوارزمية السمبلكس)

أولا: اختيار المتغير الداخل إلى الأساس:

سنوضح فيما يلي كيفية التحكم في اختيار المتجه الداخل إلى الأساس والذي سينقلنا من حل أساسي مسموح به إلى حل أساسي آخر مسموح به، تكون عنده قيمة دالة الهدف أقل من قيمتها عند الحل السابق.

لنرمز لمصفوفة المتجهات الـ m الأولى من المصفوفة $\mathbf{A}$ بالرمز $\mathbf{B}$ (المصفوفة الأساسية) ولمصفوفة باقي المتجهات بالرمز $\mathbf{N}$ أي أن $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ وليرمز $\mathbf{x_B}$ لمتجه المتغيرات الأساسية و $\mathbf{x_N}$ لمتجه المتغيرات غير الأساسية و $\mathbf{c_B}$ لمتجه المعاملات التابعة للمتغيرات الأساسية و $\mathbf{c_N}$ لمتجه المعاملات التابعة للمتغيرات غير الأساسية. وبناء على ذلك فإن المسألة (4.10) تصاغ على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c_B}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_N} \\
\text{s. t.} \quad & \\
& \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

إن الحل الأساسي المقابل للمصفوفة $\mathbf{B}$ ، والذي نفترض أنه مسموح به، نحصل عليه بجعل $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ ، ومن ثم نحل نظام المعادلات $\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b}$ أي أن $\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b}$. إن قيمة دالة الهدف بالنسبة لهذا الحل الأساسي هي:

$$z_o = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

نحصل على صياغة عامه للمتجه $\mathbf{x_B}$ من خلال الشرط الأول للمعادلة (4.11) كما يلي:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$$

بتعويض ذلك في دالة الهدف نجد:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}\right) + \mathbf{c}_\mathbf{N}^\mathbf{T}\mathbf{x_N} \\ z &= \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_\mathbf{N}^\mathbf{T} - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x_N} \\ z &= z_\circ + \sum_{j \in \Im} r_j x_j \end{aligned} \tag{4.12}$$

حيث ترمز $\Im$ لمجموعة أدلة المتغيرات غير الأساسية و $r_j = c_j - z_j$ حيث $z_j = \left(\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)_j = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ ، وبالنظر إلى المعادلة الأخيرة من (4.12) فإننا نجد أن قيمة z تعطى بدلالة المتغيرات غير الأساسية، وإن عناصر الصف الممثل لها (وهو الأخير في الجدول) ما هي إلا $r_j = c_j - z_j$. وإذا كانت $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية فإن الجدول المقابل لها هو:

	RHS	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{x_N}$
الصفوف من 1 إلى m	$\mathbf{B^{-1}b}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B^{-1}N}$
الصف الأخير	$-\mathbf{c_B^T B^{-1}b}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{r_N} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c_B^T B^{-1}N}$

إن المعادلة (4.12) ترشدنا إلى طريقه تحسين الحل الأساسي الأول المسموح به. نختار المتجه $\mathbf{a_k}$ المقابل للمتغير غير الأساسي x_k بحيث تكون قيمة المقدار r_k سالبة ثم نحاول إدخال $\mathbf{a_k}$ إلى المصفوفة الأساسية بجعل قيمة x_k تتزايد (تصبح موجبة) مع الإبقاء على بقية المتغيرات غير الأساسية مساوية الصفر فتتناقص قيمة دالة الهدف z عن قيمتها الأصلية لتصبح:

$$z = z_o + r_k x_k$$

نظرية(٢, ٣, ٤) شرط الأمثلية Optimality Condition

إذا كان $r_j \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الناتج هو حل أمثلي، أي أن قيمة دالة الهدف عند أي حل آخر مسموح به ستكون أكبر من أو تساوي قيمة دالة الهدف عند ذلك الحل.

البرهان: بما أن أي حل مسموح به سيحقق الشرط $x_i \geq 0$، وبما أن الفرض ينص على أن $r_j \geq 0$ عند حل ما z^* لذا فإننا نستنتج من العلاقة (4.12) أن:

$$z - z^* \geq 0$$

أي أن الحل $\mathbf{x}^*$ الذي يتحقق من أجله $r_j \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية هو حل أمثلي.

مثال (٤,٣,٣)

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

إن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لتكن

$$B = [a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لنحسب كلاً من $c_1 - z_1$ و $c_2 - z_2$

$$c_1 - z_1 = c_1 - c_B B^{-1} a_1 = -1 - (0,0) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

$$c_2 - z_2 = c_2 - c_B B^{-1} a_2 = -3 - (0,0) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$$

بما أن $c_2 - z_2 \langle 0$ لذا بالإمكان تحسين الحل، وذلك بجعل x_2 متغيراً أساسياً. ولكي نتعرف على القيمة التي يمكن أن تعطي لـ x_2 وأي المتغيرات سيخرج من الأساس، نحسب ما يلي:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}a_2 x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 4+2x_2 \\ 3-x_2 \end{bmatrix}$$

من الواضح أن أكبر قيمة يمكن أن نعطيها لـ x_2 هي 3 وبذا يصبح الحل الجديد يساوي $(0,3,10,10)$، وتصبح المصفوفة الأساسية الجديدة هي $B = [a_3, a_2]$، ونتابع مرحلة جديدة انطلاقاً من المصفوفة الأساسية الجديدة.

نظرية (٤ ,٣ ,٤) وحدانية الحل الأمثل:

إذا كان $r_j > 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأمثل يكون حينئذ وحيداً.

أما إذا كان $r_j \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية وكان $r_k = 0$ لأحد هذه المتغيرات، فإن جميع القيم المسموح بها لـ x_k سوف تؤدي إلى عدد لانهائي من الحلول الأمثلية.

مثال (٥ ,٣ ,٤)

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

لنأخذ مثلاً

$$B = [a_1, a_4]$$

أي أن

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن قيمة دالة الهدف المقابل للحل $(4,0,0,5)$ هي -12 . ولكي نتأكد من إمكانية إيجاد حل أفضل علينا أن نحسب كلاً من $r_2 = c_2 - z_2$ و $r_3 = c_3 - z_3$

$$r_2 = c_2 - z_2 = c_2 - c_B B^{-1} a_2 = 1 - (-3,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$$

$$r_3 = c_3 - z_3 = 0 - (-3,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

بما أن $r_2 = c_2 - z_2 \rangle 0$ ، وكذلك $r_3 = c_3 - z_3 \rangle 0$ ، لذا فإن الحل $(4,0,0,5)$ هو الحل الأمثل كما يتضح ذلك من الصيغة (4.12).

ثانيا: اختيار المتجه الخارج من الأساس

نفترض أنه لدينا حل أساسي منتظم بمعنى أن المتغيرات الأساسية جميعها موجبة $x_i > 0, \ i = 1, \dots, m$. إذا كان المتجه $\mathbf{a_k}$ حيث $k > m$ هو المتجه الذي

سيدخل إلى الأساس فكيف يمكن اختيار المتجه الخارج من الأساس الذي سيحل محله بحيث نحصل على حل أساسي جديد يحقق $\mathbf{x} \geq 0$.

بما أن المتجهات الـ m الأولى هي المتجهات الأساسية (مستقلة خطياً) فإن المتجهات $\mathbf{a}_k : k = m+1,\ldots,n$ يمكن جعلها كتركيب خطي من باقي المتجهات أي إن:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_1 y_{1k} + \mathbf{a}_2 y_{2k} + \cdots + \mathbf{a}_m y_{mk}$$

بضرب العلاقة الثانية بـ $\delta \geq 0$ وطرح الناتج من العلاقة الأولى نحصل على:

$$(x_1 - \delta y_{1k})\mathbf{a}_1 + (x_2 - \delta y_{2k})\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_m - \delta y_{mk})\mathbf{a}_m + \delta \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

إذا جعلنا قيمه δ تتزايد من الصفر تدريجياً فإن معامل $\mathbf{a}_k$ يأخذ في الزيادة، وبفرض أن $\mathbf{a}_s$ سيخرج من الأساس وسيحل محله $\mathbf{a}_k$ ، فإن اختيار δ على النحو التالي:

$$\delta = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_s}{y_{sk}} \qquad (4.13)$$

سوف يجعل أحد المعاملات ينعدم ونحصل على حل أساسي مسموح به جديد.

إذا كان هناك أكثر من دليل i يؤدي إلى قيمة واحدة لـ δ فإن ذلك يعني أن الحل الجديد غير منتظم. وإذا لم تكن هناك قيمه موجبة لأي من y_{ik} فإن ذلك يعني أن

ليس هناك من حل أساسي مسموح به محدود، بمعنى أن دالة الهدف تصل في هذه الحالة إلى قيمة غير محدودة.

ثالثا: العلاقات المحورية

بما أن مجموعة المعادلات $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ مستقلة خطياً، لذا يمكننا باستخدام العمليات الأولية على المصفوفات كتابة هذه المجموعة من المعادلات على الشكل الآتي:

$$\begin{array}{lllll} y_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{1,n}x_n & + x_1 & & & = y_{1,0} \\ y_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{2,n}x_n & & + x_2 & & = y_{2,0} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ y_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{m,n}x_n & & & + x_m & = y_{m,0} \end{array} \qquad (4.14)$$

المتغيرات الأساسية هي $x_1, x_2, \ldots, x_m$ أما المتغيرات غير الأساسية فهي $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ وبالتالي:

يمكن كتابة المعادلات السابقة على الشكل الجدولي الآتي:

$$\begin{array}{ccccccccc} y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & & y_{1,0} \\ y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & & y_{2,0} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 & & y_{m,0} \end{array}$$

بافتراض أن أحد المتغيرات الأساسية سوف يصبح متغيراً غير أساسي وسيحل محل متغير غير أساسي، ما هي التغيرات التي يجب إجراؤها على الشكل القياسي حينئذ؟

بما أن المتجهات الأولى التي عددها m هي التي تكّون الأساس، لذا فإن أي متجه آخر يمكن كتابته على شكل تركيب خطي من هذه المتجهات:

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_1 y_{1j} + \mathbf{a}_2 y_{2j} + \cdots + \mathbf{a}_m y_{mj} \qquad (4.15)$$

لنفترض أننا نود استبدال المتجه $\mathbf{a}_s$ حيث $1 \le s \le m$ بالمتجه $\mathbf{a}_t$، إن:

$$\mathbf{a}_t = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^{m} \mathbf{a}_i y_{it} + \mathbf{a}_s y_{st}$$

وبالتالي فإن:

$$\mathbf{a}_s = \frac{1}{y_{st}} \mathbf{a}_t - \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^{m} \frac{y_{it}}{y_{st}} \mathbf{a}_i$$

بتعويض هذه العلاقة في (4.15) نحصل على:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^{m} \left(y_{ij} - \frac{y_{it}}{y_{st}} y_{sj} \right) \mathbf{a}_i + \frac{y_{sj}}{y_{st}} \mathbf{a}_t \qquad (4.16)$$

وبالتالي فإن نظام المعادلات الجديد يمكن الحصول عليه من العلاقات التالية:

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{it}}{y_{st}} y_{sj} & i \neq s \\ y'_{sj} = \dfrac{y_{sj}}{y_{st}} & i = s \end{cases} \tag{4.17}$$

حيث $j = m+1,\cdots,n$. إن العنصر y_{st} يسمى بالعنصر المحوري. العلاقات (4.17) تسمى العلاقات المحورية، وهي تعني أنه لإخراج $\mathbf{a}_s$ من الأساس وإدخال $\mathbf{a}_t$ بدلاً منه علينا استبدال الجدول السابق بجدول جديد بناء على الخطوتين التاليتين:

استبدال جميع العناصر الموجودة في صف العنصر المحوري، وذلك بقسمتها على العنصر المحوري y_{st} . أما العمود المحوري فتصبح جميع عناصره (ماعدا العنصر المحوري) أصفاراً.

استبدال جميع العناصر الأخرى بناء على قاعدة المستطيل الآتي:

	العمودالمحوري
الصف المحوري	$a \quad \cdots \quad b$ $\vdots \qquad\quad \vdots$ $c \quad \cdots \quad d$

فيكون العنصر a هو العنصر المحوري ويستبدل مثلاً العدد d ليصبح:

$$d - \frac{bc}{a}$$

الآن نعطي ملخصاً عن كيفية حل مسألة البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

خوارزمية (٤ , ٣ , ٤) (ملخص خوارزمية السمبلكس) Simplex Algorithm

نتبع الخطوات التالية:

أولا: نبدأ بصياغة مسألة البرنامج الخطي بالشكل القياسي.

ثانيا: نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في جدول، ونجعل في السطر الأخير المعلومات الناشئة عن دالة الهدف آخذين في الاعتبار z كمتغير إضافي مرتبط بالمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بالمعادلة الآتية:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = z$$

نرمز لأعداد الصف الأخير بالرمز r_j ونسميها بمعملات التكلفة النسبية.

ثالثا:نكرر الآتي:

- نعين المتغير الداخل إلى الأساس، وذلك بفحص الأعداد الموجودة في السطر الأخير، الممثلة لـ **r** فإن كانت جميعها (ماعدا الرقم الأيمن) موجبة أو أصفاراً حينئذ يعتبر هذا الجدول نهائياً ونحصل منه على الحل الأمثل. وإذا لم يكن الأمر كذلك فإننا نأخذ أصغر هذه الأعداد في الاعتبار، ونسمي عموده العمود المحوري (وذلك إذا كانت دالة الهدف في البرنامج الخطي دالة تخفيض).
- نعين المتغير الخارج من الأساس حسب الصيغة (4.13). ذلك أن أصغر النسب الناشئة عن قسمة أعداد العمود الأيمن على الأعداد الموجبة المقابلة لها في العمود المحوري، يعين الصف المحوري وهو يقابل المتغير المغادر. أما العمود المحوري فيقابل المتغير الداخل، ويكون العنصر المحوري عند تقاطع الصف المحوري مع

العمود المحوري. فإن لم نجد في العمود المحوري عدداً موجباً، فذلك يعني أن المسألة غير محدودة.

• نجري العمليات المحورية وفقا للصياغة (4.17) كالتالي:

١- نقسم كل عدد من أعداد الصف المحوري على العنصر المحوري.

٢- نطرح مضاعفات مناسبة للصف المحوري الجديد من أعداد الصفوف الأخرى كي يصبح كل عنصر من العمود المحوري (ما عدا العنصر المحوري) مساوياً للصفر.

مثال (٤,٣,٥)

استبدل المتجه $\mathbf{a}_2$ بالمتجه $\mathbf{a}_5$ في المثال التالي واستنتج حلاً أساسياً جديداً.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بإجراء العمليات المحورية على المصفوفة $[\mathbf{A} \ | \ \mathbf{b}]$، كما هو مبين في الخوارزمية (٤,٣,٤).

ومع ملاحظة أن العنصر المحوري هو $a_{22}=2$ نحصل على:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 8 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1.5 & 1 & -1 & 0 & 0.5 & 0 & 2 \\ -1.5 & 0 & -2 & 0 & 0.5 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

أي أن الحل الناتج هو $x_6 = 7, \quad x_2 = 2, x_4 = 1$.

مثال (٦ ,٣ ,٤)

ليكن لدينا نظام المعادلات الآتي، استبدل المتغيرات غير الأساسية x_1, x_2, x_3 لتصبح أساسية، واستنتج حلاً أساسياً جديداً.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 5 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad +x_5 \qquad &= 3 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad +x_6 &= -1
\end{aligned}$$

أولا: نجري العمليات المحورية فيكون المتغير x_4 الخارج والمتغير x_1 الداخل؛ فنحصل على الجدول التالي:

x_1	1	1	−1	1	0	0	5
x_5	0	−5	3	−2	1	0	−7
x_6	0	3	−2	1	0	1	4

أي أن الحل الحالي هو $x_1 = 5, \quad x_6 = 4, x_5 = -7$.

ثانيا: نجري العمليات المحورية فيكون المتغير x_5 الخارج والمتغير x_2 الداخل؛ فنحصل على الجدول التالي:

x_1	1	0	−0.4	0.6	0.2	0	3.6
x_2	0	1	−0.6	0.4	−0.2	0	1.4
x_6	0	0	−0.2	−0.2	0.6	1	−0.2

أي أن الحل الحالي هو $x_2 = 1.4,\quad x_6 = -0.2, x_1 = 3.6,$.

ثالثاً: نجري العمليات المحورية فيكون المتغير x_6 الخارج والمتغير x_3 الداخل؛ فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{matrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -5 & 1 \end{matrix} \qquad (4.18)$$

أي أن الحل الحالي هو $x_2 = 4,\quad x_3 = 1, x_1 = 2,$.

فنجد حلاً أساسياً لنظام المعادلات المذكور متغيراته الأساسية هي $x_1, x_2, x_3,$.

إن حل البرنامج الخطي بجداول السمبلكس تعطينا طريقة ملائمة لعمل خطوات السمبلكس، ولنرى ذلك نتبع حل المثال التالي:

مثال (٤,٣,٧)

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -3x_1 - 2x_2 \qquad (4.19) \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & -3x_1 + 4x_2 \le 13 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي (4.19) بالشكل القياسي فندخل المتغيرات المكملة، فنحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&\min \quad z = -3x_1 - 2x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&2x_1 - x_2 + x_3 \quad = 1 \\
&-3x_1 + 4x_2 + \quad x_4 \quad = 13 \\
&x_1 + x_2 + \quad x_5 = 5 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

ثانياً: نضع المعلومات الناشئة عن البرنامج في جدول حيث نضع في العمود الأيسر المتغيرات الأساسية المقابلة لكل معادلة من معادلات القيود، وفي الصف الأخير معاملات التكلفة من معادلة الهدف، وفي العمود الأيمن نضع العمود **b**، ونضع أسفل هذا العمود في الصف الأخير سالب قيمة دالة الهدف $-z$ حيث يكون في الصف الأخير من الجدول المعادلة التالية:

$$-3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - z = 0$$

وفي باقي الجدول معاملات معادلات القيود فنحصل على الجدول التالي:

x_3	(2)	−1	1	0	0	1
x_4	−3	4	0	1	0	13
x_5	1	1	0	0	1	5
	−3	−2	0	0	0	0

ثالثاً ورابعاً: نعين المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير المقابل لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير، وبذلك يكون x_1، ويقال للعمود المقابل لهذا المتغير العمود المحوري، ثم نقسم كل عنصر من عناصر العمود الأيمن على كل عنصر موجب مقابل له في العمود المحوري؛ فنحصل على المجموعة $\{1/2, 5/1\}$؛ ويكون الصف المقابل لأصغر هذه الأعداد هو الصف المحوري وحيث إن $1/2$ هو أصغر هذه الأعداد فيكون الصف الأول هو الصف المحوري. وتقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يعطينا العنصر المحوري والذي هو (2). والمتغير الأساسي المقابل للصف المحوري هو المتغير الخارج من الأساس، وهو x_3.

خامسا : نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & 1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\
x_4 & 0 & 2.5 & 1.5 & 1 & 0 & 14.5 \\
x_5 & 0 & (1.5) & -0.5 & 0 & 1 & 4.5 \\
 & 0 & -3.5 & 1.5 & 0 & 0 & 1.5
\end{array}$$

وحيث إنه لا يزال هناك عنصر في الصف الأخير قيمته سالبة فإننا نعاود الخطوات السابقة فنحصل على الجدول النهائي التالي:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 2 \\
x_4 & 0 & 0 & 7/3 & 1 & -5/3 & 7 \\
x_2 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 3 \\
 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 7/3 & 12
\end{array}$$

أي أن الحل الأمثل هو $x_2 = 3,\ \ x_4 = 7,\ \ x_1 = 2,\ \ z = -12$.

مثال (٤,٣,٨)

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

أولاً: نبدأ بصياغة البرنامج الخطي (4.20) بالشكل القياسي ثم ندخل المتغيرات الإضافية التالية فنحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad = 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 + \quad x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

ثانياً: نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في الجدول التالي:

x_4	(2)	−2	3	1	0	1
x_5	1	−1	−2	0	1	1
	−3	3	5	0	0	0

ثالثاً ورابعاً: x_1 هو المتغير الداخل إلى الأساس. وبقسمة كل عنصر من عناصر العمود الأيمن على كل عنصر موجب مقابل له في العمود المحوري نحصل على المجموعة $\{1/2\}$، وبالتالي فإن x_4 هو المتغير الخارج من الأساس، و (2) هو العنصر المحوري.

خامساً: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

x_1	1	−1	1.5	0.5	0	0.5
x_5	0	0	−3.5	−0.5	1	0.5
	0	0	9.5	1.5	0	1.5

أي أن الحل الأمثل هو $z = -1.5,\quad x_1 = 0.5,\quad x_5 = 0.5$.

مثال (٩ , ٣ , ٤)

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -10x_1 + 32x_2 + 48x_3 + 54x_4 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \le 24 \\
& 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 32 \\
& 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 \le 64 \\
& 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 81 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

أولاً: نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي فندخل المتغيرات الإضافية لنحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\max \quad -10x_1+32x_2+48x_3+54x_4$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned}
2x_1+3x_2+5x_3+x_4+x_5 &= 24\\
5x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_6 &= 32\\
8x_1+5x_2+6x_3+10x_4+x_7 &= 64\\
3x_1+6x_2+9x_3+12x_4+x_8 &= 81\\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8 &\geq 0
\end{aligned}$$

ثانياً: نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في الجدول التالي:

x_5	2	3	5	1	1	0	0	0	24
x_6	5	2	1	3	0	1	0	0	32
x_7	8	5	6	(10)	0	0	1	0	64
x_8	3	6	9	12	0	0	0	1	81
	−10	32	48	54	0	0	0	0	0

ثالثاً ورابعاً: حيث إن دالة الهدف في البرنامج الخطي هي دالة تعظيم maximization problem فإن المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير المقابل لأكبر الأعداد الموجبة الموجودة في الصف الأخير (أي صف دالة الهدف) وبذلك يكون x_4، وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الخوارزمية (٤,٣,٤) والمثالين السابقين. وبقسمة كل عنصر من عناصر العمود الأيمن على كل عنصر موجب مقابل له في العمود المحوري نحصل على المجموعة $\{24/1,\ 32/3,\ 64/10,\ 81/12\}$ أو

$\{24,\ 10.67,\ 6.4,\ 6.75\}$، ويكون الصف المقابل لأصغر هذه الأعداد هو الصف المحوري وحيث إن 6.4 هو أصغر هذه الأعداد، لذا فإن الصف الثالث هو الصف المحوري. وتقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يعطينا العنصر المحوري والذي هو (10). والمتغير الأساسي المقابل للصف المحوري هو المتغير الخارج من الأساس، وهو x_7. لاحظ أن الحل يكون أمثلياً عندما تكون جميع الأعداد في صف دالة الهدف (الصف الأخير) غير موجبة؛ وذلك لأن دالة الهدف هنا دالة تعظيم.

خامسا: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

x_5	1.2	2.5	4.4	0	1	0	−0.1	0	17.6
x_6	2.6	0.5	−0.8	0	0	1	−0.3	0	12.8
x_4	0.8	0.5	0.6	1	0	0	0.1	0	6.4
x_8	−6.6	0.0	(1.8)	0	0	0	−1.2	1	4.2
	−53.2	5.0	15.6	0	0	0	−5.4	0	−345.6

فيكون الحل الناتج هو

$$z = 345.6,\quad x_5 = 17.6,\quad x_6 = 12.8,\quad x_4 = 6.4,\quad x_8 = 4.2,$$

وحيث إنه لا يزال هناك عنصر في الصف الأخير قيمته موجبة فإننا نعاود الخطوات السابقة فيكون العنصر المحوري هو (1.8). ثم بعد إجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

x_5	17.33	(2.5)	0	0	1	0	2.83	−2.44	7.33
x_6	−0.33	0.5	0	0	0	1	−0.83	0.44	14.67
x_4	3.0	0.5	0	1	0	0	0.5	−0.33	5.0
x_3	−3.67	0.0	1	0	0	0	−0.67	0.56	2.33
	4.0	5.0	0	0	0	0	5.0	−8.67	−382.0

فيكون الحل الناتج هو

$$z = 382.0,\quad x_5 = 7.33,\quad x_6 = 14.67,\quad x_4 = 5,\quad x_3 = 2.33$$

وحيث إنه لا يزال هناك عنصر في الصف الأخير قيمته موجبة، فإننا نعاود الخطوات السابقة. لاحظ أن هناك عمودين في كل منهما قيمة معامل التكلفة $r_i = 5.0$ ولنختار العمود الأول المقابل للمتغير x_2، أي أن x_9 هو المتغير الداخل إلى الأساس، ويكون العنصر المحوري هو (2.5)؛ وذلك لأن

$$.\ 7.33 / 2.5 = 2.9,\ \ 14.67 / 0.5 = 29.3,\ \ 5.0 / 0.5 = 10.0$$

ثم بعد إجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

x_2	6.933	1	0	0	0.4	0	1.133	−0.978	2.933
x_6	−3.8	0	0	0	−0.2	1	−1.4	0.93	13.2
x_4	−0.467	0	0	1	−0.2	0	−0.067	0.156	3.533
x_3	−3.67	0	1	0	0.0	0	−0.67	0.56	2.33
	−30.67	0	0	0	−0.2	0	−0.67	−3.78	−396.67

وبما أن جميع الأعداد في الصف الأخير غير موجبة فيكون الحل أمثلياً هو كما يلي:

$$. z = -396.67, \quad x_2 = 2.933, \quad x_6 = 13.2, \quad x_4 = 3.533, \quad x_3 = 2.33$$

(٤ , ٤) حالات خاصة Special Cases

(١ , ٤ , ٤) عدم وحدانية الحل Multiple Optimal Solutions

مثال (١ , ٤ , ٤)

إذا كانت جميع الأعداد في الصف الأخير غير سالبة، وكان هناك قيمة صفرية مقابلة لمتغير غير أساسي، فإن ذلك يعني أن هناك أكثر من حل أمثلي؛ أي أن الحل غير وحيد كما يبين ذلك المثال الآتي :

$$\begin{aligned} &\min -100x_1 - 100x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &\quad 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ &\quad 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

أولاً: نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي:

$$\min \quad -100x_1 - 100x_2 \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} &\text{s. t.} \\ &2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 8 \\ &5x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 15 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

ثانياً: نضع المعلومات الناشئة عن المسألة (4.21) في الجدول التالي:

x_3	2	2	1	0	8
x_4	(5)	3	0	1	15
	−100	−100	0	0	0

ثالثاً ورابعاً: نعين المتغير الداخل إلى الأساس و المتغير الخارج من الأساس، وذلك بتحديد العمود المحوري وفقا لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير ونعين العنصر المحوري (5).

خامساً: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

x_3	0	(0.8)	1	−0.4	2.0
x_1	1	0.6	0	0.2	3.0
	0	−40	0	20.0	300.0

ثم نعاود الخطوات السابقة فنحصل على الجدول النهائي التالي:

x_2	0	1	1.25	−0.5	2.5
x_1	1	0	−0.75	0.5	1.5
	0	0	50.0	0.0	400.0

وبما أن جميع القيم في صف دالة الهدف غير سالبة فيكون الحل أمثلياً وهو كالتالي : $x_2 = 2.5, \quad x_1 = 1.5, \quad z = -400.0$. مع ملاحظة أن الحل غير وحيد، حيث من

الممكن إيجاد حل آخر، وذلك بعمل العمليات المحورية حول أي عنصر موجب في العمود الذي يقابل قيمة صفرية في صف دالة الهدف. فنقوم بالعمليات المحورية على الجدول السابق:

x_2	0	1	1.25	−0.5	2.5
x_1	1	0	−0.75	(0.5)	1.5
	0	0	50.0	0.0	400.0

فنحصل على الجدول التالي:

x_2	1	1	0.5	0	4
x_4	2	0	−1.5	1	3
	0	0	50.0	0.0	400.0

وبذا نحصل على حل آخر أمثلي وهو التالي : $x_4 = 3,\ \ x_2 = 4,\ \ z = -400.0$.

ملاحظة

إذا كان كل من x, y حلاً أمثلياً لبرنامج خطي فإن $z = (1-t)x + ty$ هو حل أمثلي آخر، وذلك لكل $0 \le t \le 1$.

(٢ , ٤ , ٤) دالة الهدف غير محدودة Unbounded Linear Programming

مثال (٢ , ٤ , ٤)

إذا كانت جميع الأعداد في العمود المحوري غير موجبة فإن دالة الهدف غير محدودة كما يبين ذلك المثال الآتي:

$$\begin{aligned} &\min \quad -x_1 - 3x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 - 2x_2 \le 4 \\ &-x_1 + 2x_2 \le 3 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} &\min -x_1 - 3x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 \quad = 4 \\ &-x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 3 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن المسألة (4.23) في الجدول التالي:

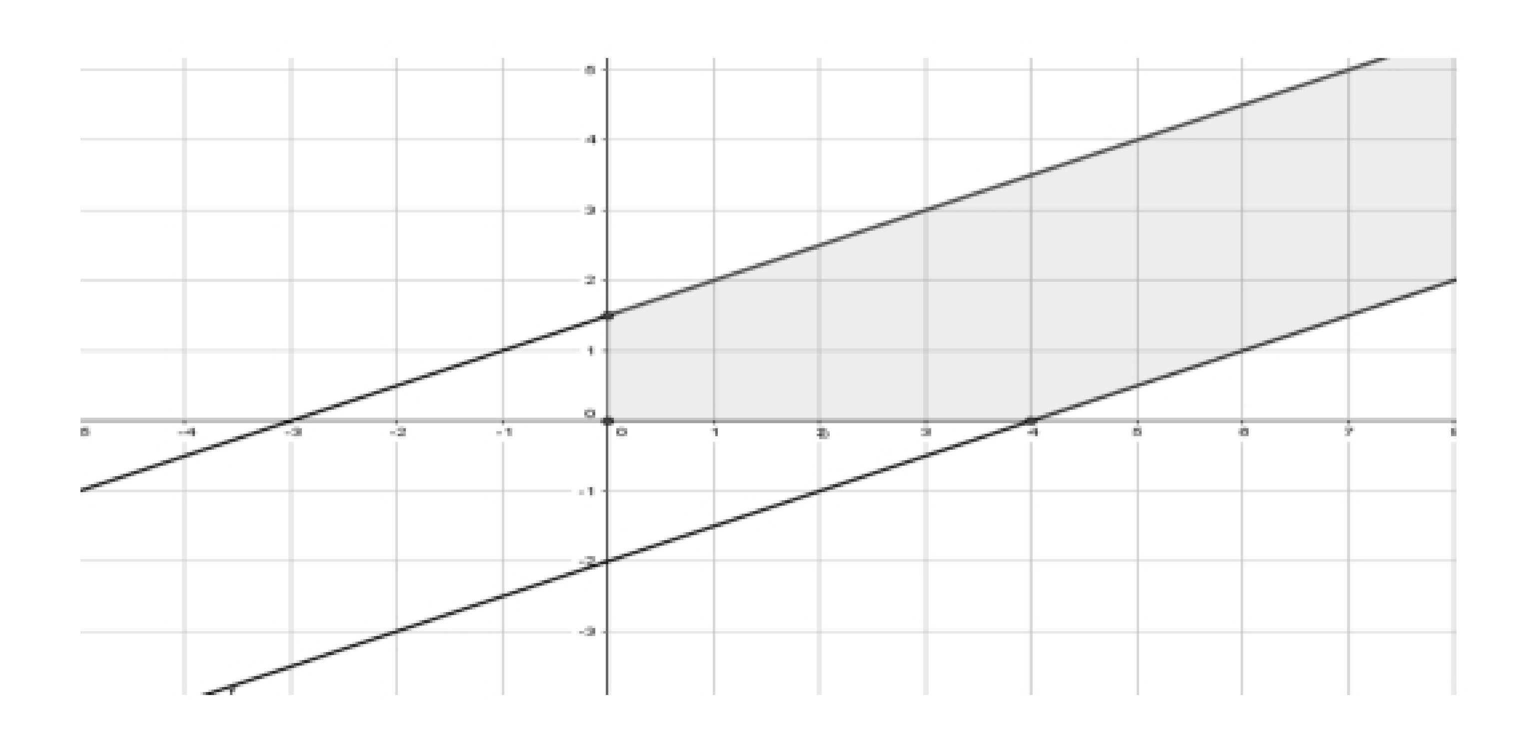
$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ x_4 & -1 & (2) & 0 & 1 & 3 \\ & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ثالثاً ورابعاً: نعين المتغير الداخل إلى الأساس و المتغير الخارج من الأساس، وذلك بتحديد العمود المحوري وفقاً لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير ونعين العنصر المحوري (2).

خامساً: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.23)، فنحصل على الجدول التالي:

x_3	0	0	1	1	7
x_2	−0.5	1	0	0.5	1.5
	−2.5	0	0	1.5	4.5

وحيث إن العمود الأول هو العمود المحوري وجميع الأعداد فيه غير موجبة فإننا نحصل على حل غير محدود. ونرى ذلك جلياً من الشكل الممثل للبرنامج الخطي (4.22) في الصفحة التالية. إن المنطقة التي فيها الخطوط متقطعة هي منطقة الحل المسموح به، كما تمثل هذه الخطوط دالة الهدف. يتضح من الشكل السابق أن دالة الهدف غير محدودة في منطقة الحل المسموح به؛ وذلك لأن قيمة دالة الهدف تنقص كلما زدنا من قيمة x_1 و x_2 في المنطقة المسموح بها.



مثال (٣ , ٤ , ٤)

وهذا مثال آخر على برنامج خطي حله غير محدود:

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 \le 9 \\ &3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 3 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أولاً: نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} &\min \quad 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \quad = 9 \\ &3x_1 + x_2 - 4x_3 \quad + x_5 = 3 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

ثانياً: نضع المعلومات الناشئة عن المسألة (4.24) في الجدول التالي:

$$\begin{array}{lrrrrrr} x_4 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ x_5 & 3 & (1) & -4 & 0 & 1 & 3 \\ & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ثالثاً ورابعاً: نعين المتغير الداخل إلى الأساس و المتغير الخارج من الأساس وذلك بتحديد العمود المحوري وفقا لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير ونعين العنصر المحوري (1).

خامساً: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{lrrrrrr} x_4 & 7 & 0 & -7 & 1 & 2 & 15 \\ x_2 & 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

وبذا نحصل على حل غير محدود حيث إن جميع الأعداد في العمود المحوري سالبة.

(٣, ٤, ٤) حالة الحل غير المنتظم Degenerate Solution

إن طريقة السمبلكس تتقارب من الحل الأمثل، وذلك عندما تقل قيمة دالة الهدف في كل دوره. ولكن قد يحدث خلال إجراء حسابات خوارزمية السمبلكس أن تكون القيمة الصغرى للنسب المذكورة في الصيغة (4.13) مساويه للصفر. هذا يعني أن متغيراً ذا قيمه صفرية سيترك الأساس ليحل محله متغير ذو قيمه صفرية. بطبيعة

الحال لن يؤدي مثل هذا الوضع إلى تغير في قيمة دالة الهدف. إن أحد المتغيرات الأساسية يساوي صفراً، وهذه هي الحالة التي يقال فيها إن الحل غير منتظم وإن الانتقال من حل غير منتظم إلى حل آخر غير منتظم قد يعيدنا إلى حل غير منتظم سبق أن ابتدأنا به.

مثال (٤ ,٤ ,٤)

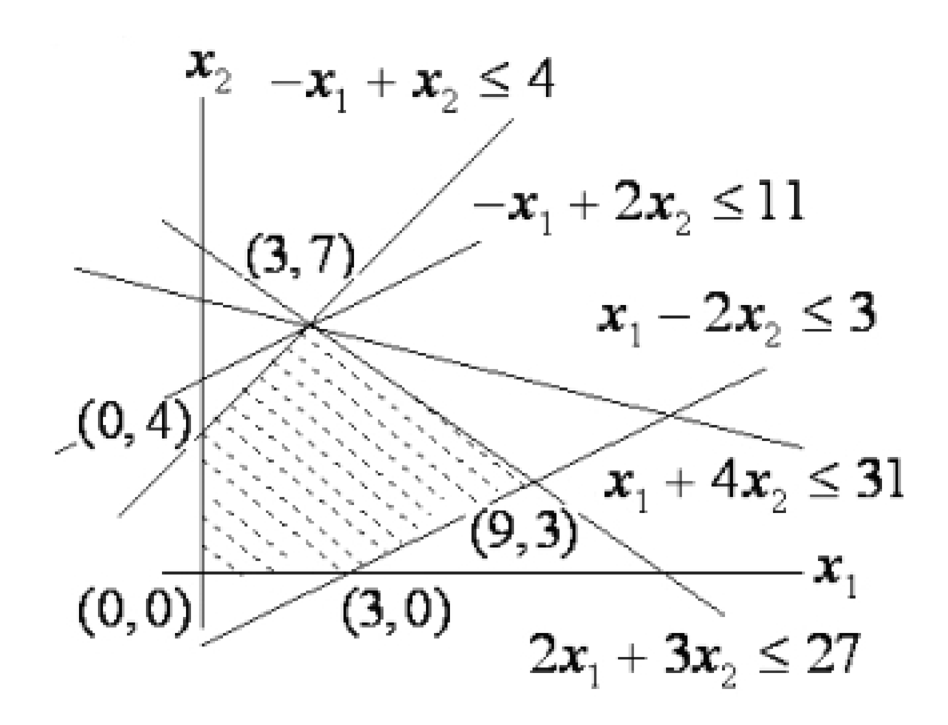
اعتبر البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ -x_1 + x_2 &\le 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 11 \\ x_1 + 4x_2 &\le 31 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 27 \\ x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

إذا أدخلنا المتغيرات الإضافية فإنه سيعطينا البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي حيث المتغيرات الأساسية هي x_3, x_4, x_5, x_6, x_7

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + \quad x_4 \qquad\qquad &= 11 \\ x_1 + 4x_2 + \qquad x_5 \qquad &= 31 \\ 2x_1 + 3x_2 + \qquad\quad x_6 \quad &= 27 \\ x_1 - 2x_2 + \qquad\qquad x_7 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\ge 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

الشكل التالي يوضح منطقة الحل المسموح به:



لاحظ أن تقاطع أي اثنين من المستقيمات التالية:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_1 + 4x_2 &= 31 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 27 \end{aligned}$$

يحدد النقطة الحدية $(3,7)$. وإذا طبقنا طريقة السمبلكس على البرنامج (4.25)، فإننا نحصل على الجدول التالي والذي نقطة البداية هي نقطة الأصل $(0,0)$ وهي النقطة الحدية الناتجة من تقاطع المستقيمين $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$:

x_3	−1	(1)	1	0	0	0	0	4
x_4	−1	2	0	1	0	0	0	11
x_5	1	4	0	0	1	0	0	31
x_6	2	3	0	0	0	1	0	27
x_7	1	−2	0	0	0	0	1	3
	−3	−4	0	0	0	0	0	0

الجدول التالي يمثل هندسياً التحرك من نقطة الأصل إلى النقطة الحدية $(0,4)$ وهي النقطة الحدية الناتجة من تقاطع المستقيمين $x_1 = 0$ و $-x_1 + x_2 = 4$.

x_2	−1	1	1	0	0	0	0	4
x_4	(1)	0	−2	1	0	0	0	3
x_5	5	0	−4	0	1	0	0	15
x_6	5	0	−3	0	0	1	0	15
x_7	−1	0	2	0	0	0	1	11
	−7	0	4	0	0	0	0	16

لاحظ في هذا الجدول أن المتغير الداخل إلى الأساس هو x_1؛ وأما المتغير الخارج من الأساس إما أن يكون x_4, x_5، أو x_6؛ وذلك لأن δ في الصيغة (4.14) متساوية لعدد من المتغيرات إذ إن $\{3\} = \{3/1, 15/5, 15/5\}$. فإذا اخترنا x_4 كمتغير خارج من الأساس فإننا نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	−1	1	0	0	0	7
x_1	1	0	−2	1	0	0	0	3
x_5	0	0	6	−5	1	0	0	0
x_6	0	0	(7)	−5	0	1	0	0
x_7	0	0	0	1	0	0	1	14
	0	0	−10	7	0	0	0	37

هذا يمثل هندسياً التحرك من النقطة الحدية $(0,4)$ إلى النقطة الحدية $(3,7)$. بما أنه في هذه الدورة $x_3 = 0$ و $x_4 = 0$ فإن تقاطع المستقيمين $-x_1 + 2x_2 = 11$ و $-x_1 + x_2 = 4$ يحدد النقطة الحدية $(3,7)$. إن المتغير الداخل إلى الأساس هو x_3، وأما المتغير الخارج من الأساس فإما أن يكون x_5 أو x_6؛ وذلك لأن δ في الصيغة (4.14) متساوية لعدد من المتغيرات حيث $\{0\} = \{0/6, 0/7\}$. فإذا اخترنا x_6 كمتغير خارج من الأساس؛ فإننا نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	0	2/7	0	1/7	0	7
x_1	1	0	0	−3/7	0	2/7	0	3
x_5	0	0	0	−5/7	1	−6/7	0	0
x_3	0	0	1	−5/7	0	1/7	0	0
x_7	0	0	0	(1)	0	0	1	14
	0	0	0	−1/7	0	10/7	0	37

هذا يعني هندسياً أننا بقينا عند نفس النقطة الحدية $(3,7)$. مع ملاحظة أن تقاطع المستقيمين $-x_1 + 2x_2 = 11$ و $2x_1 + 3x_2 = 27$ يحددا النقطة الحدية $(3,7)$ في هذه الدورة؛ وذلك لأن $x_6 = 0$ و $x_4 = 0$.

هنا تواجهنا مشكلة الحل غير المنتظم، حيث إن قيمة دالة الهدف لم تتحسن. وهذا يعطينا إحساساً بوجود دوران في طريقة السمبلكس. هندسياً نحن لم ننتقل من نقطة حدية إلى نقطة حدية أخرى، ولكننا بقينا عند نفس النقطة واعتبرنا هذه النقطة كتقاطع مستقيمين مختلفين عن المستقيمين المتقاطعين في الدورة السابقة عند نفس النقطة.

نستنتج مما سبق أنه في حالة تطبيق طريقة السمبلكس، عندما يكون هناك أكثر من متغير يمكن إدخاله إلى الأساس فإنه من السهل ملاحظة أن هذه المتغيرات لها قيمة تساوي الصفر، أي أن القيمة المقابلة لها في العمود الأيمن تساوي الصفر. إذا تابعنا خطوات السمبلكس وأضفنا دورة جديدة فإن الأساس المتبعة في اختيار المتغير الخارج من الأساس سوف تختار هذا المتغير ذا القيمة الصفرية كعنصر محوري. وتبعاً لذلك فإن قيمة دالة الهدف z لن تتحسن؛ وذلك لأننا أضفنا فقط قيمة صفر لها. ولنذكر أن البرنامج الخطي له حل غير منتظم إذا كان هناك متغير أساسي قيمته صفر.

في كثير من التطبيقات في حالات الحل غير المنتظم تؤدي طريقة السمبلكس إلى حل أمثلي، وذلك بعد اختيار متغير أساسي يغادر الأساس قيمته لا تساوي الصفر. ففي المثال (٤ , ٤ , ٤) في الجدول الأخير نختار المتغير x_7 كمتغير خارج من الأساس؛ وذلك لأنه لا يساوي الصفر، وبعد تطبيق العمليات المحورية حيث العنصر المحوري هو (1) المبين في الجدول السابق نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	0	0	0	1/7	−2/7	3
x_1	1	0	0	0	0	2/7	3/7	9
x_5	0	0	0	0	1	−6/7	5/7	10
x_3	0	0	1	0	0	1/7	5/7	10
x_4	0	0	0	1	0	0	1	14
	0	0	0	0	0	10/7	1/7	39

وبما أن صف دالة الهدف الأخير في هذا الجدول جميع قيمه موجبة، فإن الحل الذي حصلنا عليه أمثلي وهو $x_2 = 3, x_1 = 9, x_5 = 10, x_3 = 10, x_4 = 14, z = -39$، وهو يقابل هندسياً النقطة $(9,3)$.

(٤ , ٤ , ٤) حالة الدوران Cycling

في حالات نادرة جداً، فإن حالة الحل غير المنتظم قد تؤدي إلى دوران cycling. وهذا يحدث عندما يكون هناك أكثر من متغير مغادر، أي أن القيمة في الصيغة (4.14) غير وحيدة. وإذا قمنا باختيارات مختلفة للمتغير المغادر فإن ذلك لا يحدث أي تحسن لقيمة دالة الهدف بل إننا نرجع إلى الجدول الذي قد حصلنا عليه في خطوات سابقة. وإذا تابعنا هذه الخطوات فإننا نصل إلى عدد لا نهائي من خطوات السمبلكس دون الوصول إلى الحل الأمثل. المثال التالي يوضح حالة الدوران.

مثال (٥ , ٤ , ٤)

اعتبر البرنامج الخطي التالي في حالته القياسية:

x_5	−4.0	8.0	2.0	−9.0	1	0	0	0
x_6	0.5	−1.5	−0.5	1.0	0	1	0	0
x_7	1.0	0.0	0.0	0.0	0	0	1	1
	−22.0	93.0	21.0	−24.0	0	0	0	0

لو طبقنا طريقة السمبلكس على هذا المثال لا خترنا العمود الرابع عموداً محورياً ولسوف نجد أن الجدول السابع مطابق للجدول الأول ولا ستمر الدوران عدداً لا نهائي من المرات.

على الرغم من عدم حدوث ظاهرة الدوران بشكل كبير في المسائل العملية، إلا أن هذه المشكلة جذبت اهتمام الباحثين. وقد استطاع بلاند Bland عام ١٩٧٧م أن يبرهن أن القاعدة البسيطة التالية تمنع حدوث ظاهرة الدوران هذه.

قاعدة بلاند

١- اختر العمود الداخل إلى الأساس وفقا للدليل الآتي:

$$k = \min_j \{ j : r_j < 0 \}$$

أي الدليل الأصغر، وليس شرطا أن تكون قيمته الأصغر.

٢- بالنسبة للمتغير المغادر إذا لم تكن القيمة الصغرى للنسب المذكورة في الصيغة (4.14) وحيدة فاختر المقابل لأول قيمة صغرى تواجهك في العمود المحوري من أعلى.

مثال (٦ , ٤ , ٤)

استخدم قاعدة بلاند على البرنامج الخطي المذكور في المثال (٥ , ٤ , ٤)

نضع المعلومات الناشئة عن البرنامج الخطي في المثال(٥ , ٤ , ٤) في الجدول التالي:

x_5	−4.0	8.0	2.0	−9.0	1	0	0	0
x_6	(0.5)	−1.5	−0.5	1.0	0	1	0	0
x_7	1.0	0.0	0.0	0.0	0	0	1	1
	−22.0	93.0	21.0	−24.0	0	0	0	0

بهذا يكون العمود المحوري هو الأول بدلاً من الرابع، ويكون العنصر المحوري هو (0.5) . ثم نجري العمليات المحورية، فنحصل على الجدول التالي:

x_5	0	−4.0	−2.0	−2.0	1	8.0	0	0
x_1	1	−3.0	−1.0	2.0	0	2.0	0	0
x_7	0	3.0	(1.0)	−2.0	0	−2.0	1	1
	0	27.0	−1.0	20.0	0	44.0	0	0

ثم نعاود الخطوات السابقة فنحصل على الجدول النهائي التالي:

x_5	0	2	0	−5	1	4	2	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	−2	0	−2	1	1
	0	30	0	18	0	42	1	1

أي أن الحل الأمثل هو $z=-1,\quad x_1=1,\quad x_3=1,\quad x_5=2$.

(٤ , ٥) طريقة المرحلتين The Two-Phase method

حتى الآن كان تعاملنا مع البرامج الخطية من النوع:

$$\begin{aligned} \min \quad & z=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{Ax}\le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

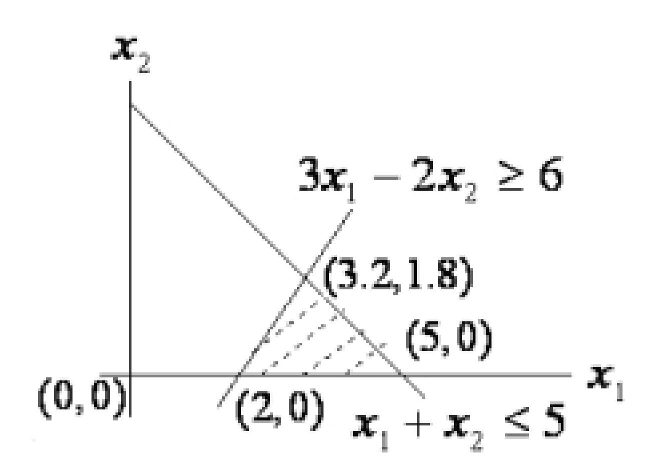
حيث إن $b_i \ge 0$ لكل $1\le i\le m$، في هذا الفصل سندرس البرامج الخطية والتي لا يشترط أن يكون الطرف الأيمن فيها غير سالب،

اعتبر البرنامج الخطي

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1+4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1+x_2\le 5 \\ & 3x_1-2x_2\ge 6 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

إن ضرب المتباينة الثانية بـ -1 سيغير في اتجاه إشارة المتباينة وتصبح إشارة الطرف الأيمن سالبة. إننا لا نستطيع استخدام المتغيرات غير الأساسية x_1 و x_2 كنقاط بداية لطريقة السمبلكس؛ وذلك لأن $x_1=0$ و $x_2=0$ يجعل قيمة المتغيرات الإضافية سالبة، وهذا سببه القيمة السالبة في المتباينة الثانية. الشكل التالي يوضح منطقة الحل

المسموح به للبرنامج الخطي (4.27). لاحظ أن المركز $(0,0)$ ليس نقطة حدية مسموح بها في منطقة الحل المسموح به.



لحل هذه المسألة سنستخدم طريقة المرحلتين.

يسهل في بعض الأحيان إيجاد حل أساسي ابتدائي للبرنامج الخطي وهو أمر كما نعلم ضروري كنقطة انطلاق لطريقة السمبلكس. إلا أنه في كثير من الأحيان، كما رأينا في المثال السابق، يصعب الحصول على حل أساسي ابتدائي مباشر للبرنامج الخطي الذي شروطه مكتوبة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{b} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.28}$$

إن حل البرنامج الخطي يمر بالمرحلتين التاليتين:

المرحلة الأول: لكي نتوصل إلى حل أساسي ابتدائي نأخذ في عين الاعتبار البرنامج الخطي المساعد الآتي:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} &\text{s. t.} \\ &\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ &\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ندعو $\mathbf{y}$ متجه المتغيرات المساعدة artificial variables . إذا كانت القيمة الصغرى للبرنامج (4.29) مساويه الصفر فإن هذا يعني أن $y_i = 0$ وأن قيم x_i سوف توصلنا إلى حل أساسي ابتدائي للمسألة الأصلية (4.28). أما إذا كانت القيمة الصغرى للبرنامج (4.29) لا تساوي الصفر، فهذا يعني أن المسألة المساعدة (4.29) غير متوافقة مع المسألة الأصلية، وبالتالي لن يكون للمسألة الأصلية حل مسموح به.

المرحلة الثانية: بعد حل المسألة المساعدة تكون المرحلة الأولى قد انتهت وتبدأ المرحلة الثانية بالاستعانة بالحل الأساسي المسموح به الناتج عن المرحلة الأولى في سبيل تطبيق طريقة السمبلكس لإيجاد القيمة الصغرى لدالة الهدف في المسألة الأصلية. وفي هذه المرحلة يتم التغاضي عن المتغيرات المساعدة، وكذلك عن دالة الهدف للمسألة المساعدة.

نطبق هذه الطريقة على المثال (4.27)، نضيف المتغيرات الإضافية x_3, x_4 التالية:

$$\begin{aligned} &\min \ -3x_1 + 4x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ &3x_1 - 2x_2 - x_4 = 6 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

للسهولة سنسمي المتغيرات الزائدة والإضافية بالإضافية. نلاحظ أنه في هذه المرحلة لا يمكن استخدام المتغيرات x_3 و x_4 كمتغيرات أساسية؛ وذلك لأنه إذا كان $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ فإنه يكون لدينا الحل غير المسموح به $(0,0,5,-6)$. نضيف المتغير المساعد y_1 ويكون لدينا البرنامج الخطي المساعد التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_4 + y_1 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

إن البرنامجين (4.30) و(4.31) غير متكافئين، ولكن إذا كان $(t_1, t_2, t_3, t_4, 0)$ حلاً أساسياً لـ (4.31) حيث المتغير المساعد y_1 غير أساسي، فإن (t_1, t_2, t_3, t_4) يكون حلاً أساسياً لـ (4.30).

إن الفكرة الأساسية هي جعل المتغيرات الأساسية المساعدة في المرحلة الأولى متغيرات غير أساسية، ومن ثم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

الجدول التالي يمثل البرنامج (4.31)

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	1	1	1	0	0	5
y_1	3	−2	0	−1	1	6
	0	0	0	0	1	0

نتخلص من المتغيرات الأساسية بجعلها غير أساسية، ومن ثم الرجوع إلى المسألة الأصلية. في البداية نتخلص من الواحد المقابل لدالة الهدف بضرب الصف الثاني في (1−) وجمعه مع الصف الأخير نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	1	1	1	0	0	5
y_1	3	−2	0	−1	1	6
	−3	2	0	1	0	−6

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	0	5/3	1	1/3	−1/3	3
x_1	1	−2/3	0	−1/3	1/3	2
	0	0	0	0	1	0

وبما أن جميع القيم في الصف الأخير غير سالبة نكون حصلنا على القيمة الأصغرى لـ y_1 والذي يساوي الصفر. وحيث إن هذا هو المطلوب إذ تمكنا من جعل المتغير y_1 غير أساسي، وبالتالي نكون قد حصلنا على حل أساسي للمسألة الأصلية (4,30) وهو (2,0,3,0).

نتنقل الآن إلى المرحلة الثانية حيث نضع في الصف الأخير معاملات دالة الهدف الأصلية ونحذف العمود الممثل للمتغير المساعد فنحصل على الجدول التالي:

x_3	0	2/3	1	1/3	3
x_1	1	−2/3	0	−1/3	2
	−3	4	0	0	0

نضرب الصف الثاني بـ3 ونضيفها إلى الصف الأخير فنحصل على الجدول التالي:

x_3	0	2/3	1	1/3	3
x_1	1	−2/3	0	−1/3	2
	0	2	0	−1	6

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

x_4	0	2	3	1	9
x_1	1	0	1	0	5
	0	4	3	0	15

وبذلك نكون قد أنهينا المرحلة الثانية والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأمثل التالي $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 9$ ودالة الهدف $z = -15$.

مثال (١,٥,٤)

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned}
&\min \quad 4x_1 + x_2 + x_3 \\
&\text{s. t.} \\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
&3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

في هذا المثال لا يوجد حل أساسي واضح، لذا نستخدم طريقة المرحلتين:

المرحلة الأولى: نضيف المتغيرين المساعدين $y_1, y_2 \geq 0$ ودالة الهدف المساعدة $y_1 + y_2$. فيتكون لدينا البرنامج المساعد التالي:

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 \\ \text{s. t.} & \\ \multicolumn{2}{l}{2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4} \\ \multicolumn{2}{l}{3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3} \\ \multicolumn{2}{l}{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0} \end{array}$$

ومنه نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
	0	0	0	1	1	

نتخلص من المتغيرات الأساسية بجعلها غير أساسية، ومن ثم الرجوع إلى المسألة الأصلية. في البداية نتخلص من الواحد المقابل لدالة الهدف بضرب الصف الأول في (-1) وجمعه مع الصف الأخير، وكذلك بضرب الصف الثاني في (-1) وجمعه مع الصف الأخير فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
	–5	–4	–3	0	0	–7

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
x_3	0	–3/4	1	3/4	–1/2	3/2
x_1	1	5/4	0	–1/4	1/2	1/2
	0	0	0	1	1	0

نلاحظ أن كلاً من المتغيرات المساعدة قد خرج من الأساس وأن دالة الهدف المساعدة مساوية للصفر، وبذا نكون قد أنهينا المرحلة الأولى والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأساسي الابتدائي التالي $x_1 = 1/2, x_2 = 0 x_3 = 3/2$.

المرحلة الثانية: نبدأ بالجدول الذي حصلنا عليه من المرحلة الأولى بعد إهمال الأعمدة المقابلة للمتغيرات المساعدة فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	–3/4	1	3/2
x_1	1	5/4	0	1/2
	4	1	1	0

نجري العمليات الحسابية اللازمة لجعل $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ لجميع المتغيرات الأساسية فنحصل على:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	−3/4	1	3/2
x_1	1	(5/4)	0	1/2
	0	−13/4	0	−7/2

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	3/5	0	1	9/5
x_2	4/5	1	0	2/5
	13/5	0	0	−11/5

وبذلك نكون قد أنهينا المرحلة الثانية والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأمثل التالي

$$x_1 = 0, x_2 = 2/5, x_3 = 9/5$$

ودالة الهدف $z = 11/5$.

مثال (٢, ٥, ٤)

حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned} &\min \quad x_1 + 2x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &3x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ &2x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

في هذا المثال لا يوجد حل أساسي واضح، لذا نستخدم طريقة المرحلتين. نضيف المتغيرين المساعدين $y_1, y_2 \geq 0$ ودالة الهدف المساعدة $y_1 + y_2$. فيتكون لدينا البرنامج المساعد التالي:

$$\begin{array}{l} \min \qquad y_1 + y_2 \\ \text{s. t.} \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + y_1 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + y_2 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

المرحلة الأولى: نبدأ بالجدول

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	3	4	1	0	1	0	20
y_2	2	−1	0	−1	0	1	2
	0	0	0	0	1	1	

نتخلص من المتغيرات الأساسية بجعلها غير أساسية، ومن ثم الرجوع إلى المسألة الأصلية. في البداية نتخلص من الواحد المقابل لدالة الهدف بضرب الصف الأول في (−1) وجمعه مع الصف الأخير، وكذلك بضرب الصف الثاني في (−1) وجمعه مع الصف الأخير فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	3	4	1	0	1	0	20
y_2	2	−1	0	−1	0	1	2
	−5	−3	−1	1	0	0	−22

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_2	0	1	2/11	3/11	2/11	−3/11	34/11
x_1	1	0	1/11	−4/11	1/11	4/11	28/11
	0	0	0	0	1	1	0

نلاحظ أن كلاً من المتغيرات المساعدة قد خرج من الأساس، وأن دالة الهدف المساعدة مساوية للصفر، وبذا نكون قد أنهينا المرحلة الأولى والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأساسي الابتدائي التالي $x_1 = 28/11, x_2 = 34/11, x_3 = 0, x_4 = 0$.

المرحلة الثانية: نبدأ بالجدول الذي حصلنا عليه من المرحلة الأولى بعد إهمال الأعمدة المقابلة للمتغيرات المساعدة فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	2/11	3/11	34/11
x_1	1	0	1/11	−4/11	28/11
	1	2	0	0	0

نجري العمليات الحسابية اللازمة لجعل $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ لجميع المتغيرات الأساسية فنحصل على:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	2/11	3/11	34/11
x_1	1	0	1/11	−4/11	28/11
	0	0	−5/11	−2/11	−96/11

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	11/2	1	3/2	17
x_1	1	−1/2	0	−1/2	1
	0	5/2	0	1/2	−1

وبذلك نكون قد أنهينا المرحلة الثانية والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأمثل التالي

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 17, x_4 = 0$$

ودالة الهدف $z = 1$.

ملحوظة: يمكن حل المثال السابق بإضافة متغير مساعد واحد فقط.

(٦ , ٤) خوارزمية السمبلكس المحسنة The Revised Simplex Method

إن البرامج الخطية التي تظهر في التطبيقات تحتوي على مصفوفات كبيرة وكثيرة الأصفار (Sparse Matrix). إن هذا النوع من المصفوفات يستدعي اتباع طريقة سمبلكس معدلة تخفف من العمليات الحسابية وتكتفي بما هو ضروري وتقلل بذلك من أماكن التخزين في الحاسب الآلي. وهذا بطبيعة الحال يؤدي إلى زيادة كفاءة طريقة السمبلكس مما يؤهلها لحل المسائل العملية بشكل فعال.

لقد لوحظ من خلال التعامل مع خوارزمية السمبلكس أن عدد العمليات المحورية هو حوالي $3m/2$ فإذا كانت m أقل بكثير من n، فمن الواضح أن جزءاً كبيراً من أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$ لن تجرى عليها عمليات محورية. وبالتالي فإن الوقت المستنفذ على مثل هذه الحسابات هو وقت ضائع. بالإضافة إلى ذلك فإن تخزين هذه

الأعمدة هو أيضا مضيعة لذاكرة الحاسب. من هنا فإن خوارزمية السمبلكس المحسنة تقوم بترتيب عمليات السمبلكس بشكل يتجنب حساب وتخزين المعلومات غير الضرورية، وهذا بطبيعة الحال يؤدي إلي زيادة كفاءة خوارزمية السمبلكس مما يؤهلها لحل المسائل العملية بشكل فعال.

(٤ , ٦ , ١) خوارزمية السمبلكس المحسنة: Revised Simplex Algorithm(RSM)

يتم ترتيب العمليات في هذه الخوارزمية وفقاً لما يلي:

إذا كان لدينا معكوس المصفوفة $\mathbf{B}$ والحل الابتدائي $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ فإننا نقوم بعدئذ بتكرار الخطوات الآتية:

أولا : نحسب معاملات التكلفة النسبية للمتغيرات غير الأساسية

$$\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$$

والتي يمكن حسابها بحساب المتجه

$$\mathbf{d}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}$$

ثم نحسب

$$\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T} - \mathbf{d}^{T}\mathbf{N}$$

إذا كانت جميع مركبات المتجه $\mathbf{r_N}$ غير سالبة، فإن ذلك يعني أن الحل أمثلي.

ثانيا : نحدد المتجه $\mathbf{a_k}$ الداخل إلى الأساس، وذلك بأخذ أصغر قيمة سالبة من قيم معاملات التكلفة النسبية ثم نعبر عن هذا المتجه وفقاً للأساس الحالي أي أننا نقوم بحساب:

$$\mathbf{a}_k^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a_k}$$

ثالثا : نحسب النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ ثم نحدد المتجه الخارج من الأساس، وذلك بأخذ أصغر هذه النسب (إذا كانت القيمة الصغرى لهذه النسب ليست وحيدة فإننا نأخذ أول قيمه صغرى من أعلى أي أننا نطبق قاعدة بلاند) حسب الجدول التالي:

الطرف الأيمن	معكوس الأساس
$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}$
$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{b}$	$-\mathbf{d}^T$

رابعا : نجري العمليات المحورية للحصول على معكوس المصفوفة الأساسية الجديدة، وكذلك للحصول على حل أساسي جديد.

مثال (٣,٦,٤)

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس المحسنة (RSM)

$$\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

في البداية نضيف متغيرات مكملة Slack variables x_7, x_8, x_9 ثم نجد قيمة $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} = (0,0,0)$$

حيث المصفوفة الأساسية $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ فيتكون لدينا الجدول التالي:

الطرف الأيمن	معكوس الأساس			
6	x_7	1	0	0
4	x_8	0	1	0
4	x_9	0	0	1
0	$-z$	0	0	0

الدورة الأولى

أولاً: نحسب $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ وبما أن $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ لذا فإن $\mathbf{r}_\mathbf{N} = \mathbf{c}_\mathbf{N}$ ومن هنا نجد $k = 5$ ويكون المتغير الداخل x_5.

$$\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

في البداية نضيف متغيرات مكملة Slack variables x_7, x_8, x_9 ثم نجد قيمة $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} = (0,0,0)$$

حيث المصفوفة الأساسية $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ فيتكون لدينا الجدول التالي:

الطرف الأيمن	معكوس الأساس
6	x_7 1 0 0
4	x_8 0 1 0
4	x_9 0 0 1
0	$-z$ 0 0 0

الدورة الأولى

أولاً: نحسب $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ وبما أن $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ لذا فإن $\mathbf{r}_\mathbf{N} = \mathbf{c}_\mathbf{N}$ ومن هنا نجد $k = 5$ ويكون المتغير الداخل x_5.

ثانياً:

$$\mathbf{a}_5^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثم ندخل المتجه $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_5^* \\ c_5 - u_5 \end{bmatrix}$ إلى أيمن الجدول السابق، حيث $u_5 = \mathbf{d}^T\mathbf{a}_5$.

ثالثا: نحسب أصغر النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ لتعيين العنصر المحوري وهو هنا $a_{35}^* = 2$ فنحصل بعد الاختزال على الجدول التالي:

معكوس الأساس				الطرف الأيمن	$\mathbf{a}_5^*$
x_7	1	0	0	6	1
x_8	0	1	0	4	0
x_9	0	0	1	4	(2)
$-z$	0	0	0	0	–4

بعد إجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

معكوس الأساس				الطرف الأيمن
x_7	1	0	–1/2	4
x_8	0	1	0	4
x_5	0	0	1/2	2
$-z$	0	0	2	8

الدورة الثانية

أولاً: نحسب مره أخرى $\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T} - \mathbf{d}^{T}\mathbf{N}$ و

$$\mathbf{d}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1} = (0,0,-2)$$

إن $r_j = c_j - u_j = c_j - \mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}_j$ وبالتالي نجد أن

$$\begin{aligned} c_1 - u_1 &= -1, \quad c_2 - u_2 = -2, \quad c_3 - u_3 = 3, \\ c_4 - u_4 &= 1, \quad\ \ c_6 - u_6 = 4, \quad\ \ c_9 - u_9 = 2, \end{aligned}$$

فنجد أن $k = 2$ ويكون المتغير الداخل x_2 .

ثانياً:

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثم ندخل المتجه $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* \\ c_2 - u_2 \end{bmatrix}$ إلى أيمن الجدول السابق مع ملاحظة أن $c_2 - u_2 = -2$.

ثالثا: نحسب أصغر النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ لتعيين العنصر المحوري وهو هنا $a_{21}^* = 1$ فنحصل على الجدول التالي:

وبما أن جميع $c_j - u_j \geq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأساسي المعطى في الجدول السابق هو الحل الأمثل (المتغير x_7 غادر الأساس وبالتالي $c_7 - u_7 > 0$).

مثال (٤ , ٦ , ٤)

استخدم طريقة السمبلكس المحسنة (RSM) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} &\min \quad -2x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &x_1 + x_2 \leq 9 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

نضع الجدول الخاص بطريقة السمبلكس المحسنة بعد إضافة المتغيرات الإضافية.

	$\mathbf{B}^{-1}$		$\mathbf{b}$
x_3	1	0	4
x_4	0	1	9
z	0	0	0

ثم نحسب $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ بما أن $\mathbf{d} = \mathbf{0}$، لذا فإن $\mathbf{r}_\mathbf{N} = \mathbf{c}_\mathbf{N}$ ومن هنا نجد أن $k = 2$ ويكون المتغير الداخل x_2

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن جميع $c_j - u_j \geq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأساسي المعطى في الجدول السابق هو الحل الأمثل (المتغير x_7 غادر الأساس وبالتالي $c_7 - u_7 > 0$).

مثال (٤ ,٦ ,٤)

استخدم طريقة السمبلكس المحسنة (RSM) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\ x_1 + x_2 & \leq 9 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

نضع الجدول الخاص بطريقة السمبلكس المحسنة بعد إضافة المتغيرات الإضافية.

	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}$
x_3	1 0	4
x_4	0 1	9
z	0 0	0

ثم نحسب $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ بما أن $\mathbf{d} = \mathbf{0}$، لذا فإن $\mathbf{r}_\mathbf{N} = \mathbf{c}_\mathbf{N}$ ومن هنا نجد أن $k = 2$ ويكون المتغير الداخل x_2

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثم ندخل المتجه $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* \\ c_2 - u_2 \end{bmatrix}$ إلى أيمن الجدول السابق.

نحسب أصغر النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ لتعيين العنصر المحوري وهو هنا $a_{12}^* = 2$ فنحصل على الجدول التالي:

	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}_2^*$
x_3	1 0	4	(2)
x_4	0 1	9	1
z	0 0	0	−2

بعد إجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}$
x_2	0.5 0	2
x_4	−0.5 1	7
z	1 0	40

الدورة الأولى

نحسب مره أخرى $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ وكذلك

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} = (-1,0)$$

إن $r_j = c_j - u_j = c_j - \mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{a}_j$ وبالتالي فإننا نجد:

$$c_1 - u_1 = 1, \quad c_3 - u_3 = 1,$$

وبما أن جميع $c_j - u_j \geq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأساسي المعطى في الجدول السابق هو الحل الأمثل.

(٤ ,٧) طريقة كارماركر Karmarkar Method

في عام ١٩٨٤م وجد كارماركر طريقة جديدة لحل مسائل البرمجة الخطية، وقد امتازت هذه الطريقة بقدرتها على حسل المسائل ذات الحجم الكبير. وسوف نذكر كلمة موجزة حول هذه الطريقة. تبدا طريقة كارماركر، خلافا لطريقة السملبكس، من نقطة داخل المنطقة المسموح بها ثم نتحرك بالاتجاه الأفضل حول تحسين دالة الهدف. ولسوف لن نخوض في تفاصيل الخوارزمية وإنما نكتفي باستعراض مثال بسيط، ونوجه القارئ إلى كتاب Taha[3] المثال التالي مقتبس من كتاب Taha[3].

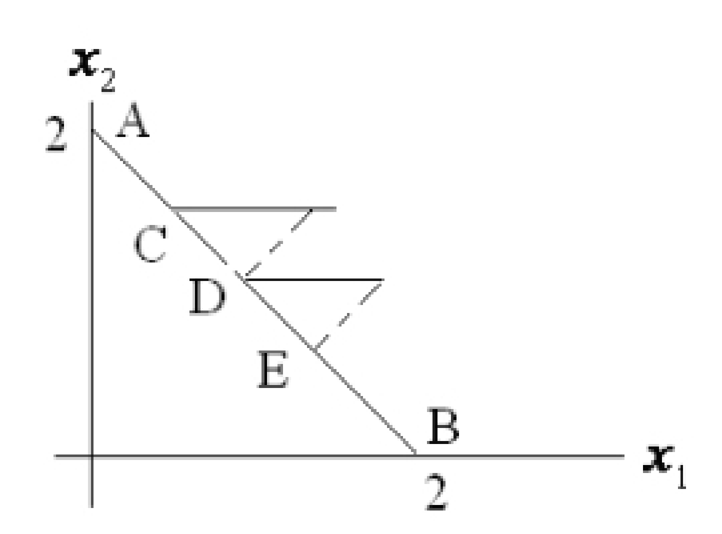
مثال (٤ ,٧ ,١)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 0 \leq x_1 \leq 2 \end{aligned}$$

باستخدام متغير مكمل x_2 يمكن كتابة المسألة على النحو التالي

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

إن القطعة AB تمثل فضاء الحلول تزداد قيمة z في الاتجاه الموجب لـ x_1 . لنبدأ بإحدى النقاط الداخلية من فضاء الحلول AB، ولتكن النقطة C إن انحدار (gradient) دالة الهدف $z = x_1$ عند C يشير إلى الاتجاه الذي تزداد فيه Z أعظم مايمكن. نختار نقطة ما على هذا الاتجاه، ومن ثم نسقط عمودياً على الفضاء المسموح به (المستقيم AB) فنحصل على نقطة D تجعل قيمة دالة الهدف أفضل مما سبق. نكرر الخطوات التي أجريناها آنفاً على النقطة الجديدة D فنحصل على نقطة جديدة E، وهكذا فإننا نصل في النهاية إلى الحل الأمثل عند B .



تمارين الباب الرابع

(١ , ٤) أوجد حلاً أمثلياً للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 \le 10 \\
& x_1 + x_2 \le 8 \\
& 3x_1 + 5x_2 \le 26 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

(٤ , ٢) أوجد حلاً أمثلياً للبرنامج التالي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = -4x_1 - 3x_2 + 12x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& -2x_1 - 3x_2 + 12x_3 \le -5 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \le -3 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(٤ , ٣) أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + 2x_3 \ge 4 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(٤ , ٤) لدينا البرنامج الخطي الآتي

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1 - 3x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 4 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج المذكور.

(٤ , ٤) حل البرنامج التالي بطريقة السمبلكس :

$$\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

(٤ , ٦) حل التمرين (٧ , ٢) بطريقتين مختلفتين.

(٤ , ٧) باستخدام طريقة المرحلتين استخدم المرحلة الأولى لإثبات أن البرنامج التالي ليس له حل مسموح به:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 3x_1 + 4x_2 \le 5 \\
& 2x_1 + x_2 \ge 2 \\
& -x_1 + x_2 \ge 1 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(٤ , ٨) حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\
& 2x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

(٤ ,٩) باستخدام طريقة المرحلتين استخدم المرحلة الأولى لإثبات أن البرنامج التالي ليس له حل مسموح به:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 5 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ & -x_1 + x_2 \ge 1 \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

(٤ ,١٠) حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\ & \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 - x_2 &\le -1 \\ -x_1 - x_2 &\le -3 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤ ,١١) حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned} \min\ & -30x_1 + 40x_2 \\ \text{s. t.}\ & \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 3x_1 - 2x_2 &\ge 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤ , ١٢) أوجد الشرط اللازم والكافي لكل من t, s كي يكون للبرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} &\min -x_1 - x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &sx_1 + tx_2 \le 1 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

حلاً أمثلياً.

(٤ , ١٣) أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي ثم حلها:

$$\begin{aligned} &\max \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ &\text{s. t.} \\ &2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ &x_1 - x_3 = 1 \\ &x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤ , ١٤) حل بطريقة السمبلكس البرنامج التالي مستخدما قاعدة بلاند:

$$\begin{aligned} &\min \quad z = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 15 \\ &2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10 \\ &\mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

(٤ , ١٥) اشرح باختصار طريقة السمبلكس المحسنة (RSM).

(٤ , ١٦) استخدم (RSM) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& x_1 + x_2 \le 9 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(٤ , ١٧) استخدم خوارزمية السمبلكس المحسنة (RSM) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\
& x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

(٤ , ١٨) باستخدام طريقة السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_2 + x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \le 5 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(٤ , ١٩) باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ &2x_1 + 3x_3 \le 5 \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 7 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤ , ٢٠) باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} &\min -2x_2 + 4x_3 \\ &\text{s. t.} \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -4 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ &2x_1 - x_2 - x_3 \le 5 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤ , ٢١) باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\max 2x_1 + x_2\\
&\text{s. t.}\\
&2x_1 + 3x_2 \le 3\\
&x_1 + 5x_2 \le 1\\
&2x_1 + x_2 \le 4\\
&4x_1 + x_2 \le 5\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

(٤ , ٢٢) باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\max 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4\\
&\text{s. t.}\\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

(٤ , ٢٣) حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس المحسنة:

x_4	1	2	-1	1	0	0	4
x_5	1	1	1	0	1	0	6
x_6	2	0	1	0	0	1	8
	2	-1	1	0	0	0	0

(٤ , ٢٤) الجدول الابتدائي والحالي لبرنامج خطي هما على الترتيب:

x_4	2	c	d	1	0	6
x_5	-1	3	e	0	1	1
	a	1	-2	0	0	0

x	g	2	-1	0.5	m	f
x	h	i	1	0.5	1	p
	n	q	j	k	b	9

أوجد جميع المجاهيل من a الى q. (مساعدة: استخدم $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ، $z = \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ، $\mathbf{r_N} = \mathbf{c_N} - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ ، $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{N}^*$)

(٤ , ٢٥) باستخدم طريقة السمبلكس المحسنة للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned}
&\max \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 \\
&\text{s. t.} \\
&8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \le 7 \\
&2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \le 3 \\
&x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 8 \\
&\mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}$$

أوجد $\mathbf{d}^{(3)}$ (أي حل البرنامج الى بداية الدورة الثالثة).

الفصل الخامس

الثنائية والحساسية
Duality and Sensitivity

(٥ , ١) مقدمة حول الثنائية Introduction to duality

الغرض من هذا الفصل هو توليد برنامج خطي جديد من برنامج خطي سابق بحيث تتصف هذه العملية بأنها متعاكسة بمعنى أن ثنائية الثنائية هي البرنامج الأصلي. ومن ثم فإننا سوف نتطرق إلى العلاقة الوثيقة التي تربط بين هذين البرنامجين، وإن أسهل شرح لتلك العملية يتضح من خلال المثال التالي:

يتوفر مصدران للبروتين مثلاً اللحم والزبدة. كل رطل من الزبدة يعطي وحدة من البروتين وكل رطل من اللحم يعطي وحدتين من البروتين. ويتطلب من الوجبة أن تحتوي على أربع وحدات من البروتين على الأقل. فإذا مانت الوجبة تحتوي على x رطلاً من الزبدة و y رطلاً من اللحم فإنها تكون مقيدة بالشروط التالية:

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \geq 4$$

والمسألة عبارة عن البحث على التكلفة الأصغرية ، علماً أن ثمن رطل من الزبدة خمسة ريالات وثمن رطل من اللحم ثمانية ريالات، إذا نبحث عن x و y بحيث

$$\begin{array}{ll} \min & 5x+8y \\ \text{s. t.} & \\ & x+2y \geq 4 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

إن المسألة المقابلة تواجه البائع الذي يبيع بروتيناً صناعياً. إنه يريد الحصول على أعلى الأسعار p ، ولكن هذا السعر خاضع لقيود: أولاً، يجب ألا يكلف البروتين الصناعي أكثر من سعر بروتين الزبدة (الذي هو خمسة ريالات للوحدة) أو سعر بروتين اللحم (الذي هو ثمانية ريالات للوحدتين). لما كانت الوجبة تتطلب أربع وحدات من البروتين، وبذا فإن صيغة المسألة المقابلة تصبح كما يلي:

$$\begin{array}{ll} \max & 4p \\ \text{s. t.} & \\ & 2p \leq 8 \\ & p \leq 5 \\ & p \geq 0 \end{array}$$

هذا مثال تكون فيه المسألة المقابلة أسهل حلاً من المسألة الأصلية. فمن الواضح أن السعر الأعلى للبروتين الصناعي هو 4، وبذلك يكون الدخل $2p=8$ ريالاً. وهو نفس التكلفة الدنيا للمسألة الأصلية.

هناك عدة طرائق لتعريف الثنائية من البرنامج الأصلي، إن ذلك يعتمد على طريقة تعريف القيود، وعلى إشارة المتغيرات. سوف نستعرض الأشكال الثلاثة التالية:

١ - الثنائية في حالة المتباينات:

المسألة الأصلية:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

المسألة المقابلة:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

٢ - الثنائية في حالة المعادلات:

المسألة الأصلية:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

المسألة المقابلة:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ \text{s. t.} \quad & \qquad\qquad\qquad (5.1) \\ & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \le \mathbf{c}^T \end{aligned}$$

$\mathbf{w}$ بدون قيود.

٣- الثنائية في الحالة المختلطة:

المسألة الأصلية:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in N} c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \qquad\qquad\qquad (5.2) \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} \ge b_i \qquad i\in I \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \qquad i\in E \\ & x_j \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

حيث $N=\{1,2,\ldots,n\}$ ، $M=\{1,2,\ldots,m\}$ و $M=I\cup E$ إن المسألة المقابلة للمسألة الأصلية هي على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i\in M} b_i w_i \\ \text{s. t.} \quad & \qquad\qquad\qquad (5.3) \\ & \mathbf{a}_j^T\mathbf{w} \le c_j \qquad j\in N \\ & w_i \ge 0 \qquad i\in I \end{aligned}$$

$i\in E$ w_i بدون قيود.

أو العكس إذا كانت المسألة الأصلية كما يلي:

$$\begin{aligned} &\max \quad \sum_{j \in N} c_j x_j \\ &\text{s. t.} \\ &\quad \mathbf{a}_i \mathbf{x} \geq b_i \quad i \in I \\ &\quad \mathbf{a}_i \mathbf{x} = b_i \quad i \in E \\ &\quad x_j \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.4}$$

فتكون المسألة المقابلة:

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{i \in M} b_i w_i \\ &\text{s. t.} \\ &\quad \mathbf{a}_j^T \mathbf{w} \geq c_j \quad j \in N \\ &\quad w_i \leq 0 \quad i \in I \end{aligned} \tag{5.5}$$

$i \in E \quad w_i$ بدون قيود.

ربما تسهل عملية كتابة المسألة المقابلة إذا تتبعنا الجدول الآتي:

max	min
شروط: $\leq$ ، $\geq$ ، $=$	متغيرات: $\geq$ ، $\leq$ ، بدون قيود
متغيرات: $\geq$ ، $\leq$ ، بدون قيود	شروط: $\geq$ ، $\leq$ ، $=$

مثال (١ , ١ , ٥)

اكتب المسألة المقابلة للبرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ & -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ & 4x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 0 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

المسألة المقابلة هي

$$\begin{aligned} \max \quad & 3w_1 - 2w_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 3w_1 - 2w_2 + 4w_3 \leq 1 \\ & 2w_1 - 3w_2 - w_3 \leq 4 \\ & -w_1 - 2w_2 + 3w_3 \leq 4 \\ & w_1 \geq 0 \\ & w_3 \leq 0 \end{aligned}$$

w_2 بدون قيد.

مثال (١ , ١ , ٥)

اكتب المسألة المقابلة للبرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 - 6x_2 \geq 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 = 4 \\ & x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

المسألة المقابلة هي

$$\begin{aligned} \min \quad & 2w_1 + 4w_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & w_1 \leq 0 \end{aligned}$$

w_2 بدون قيد.

ليكن لدينا البرنامج لأصلي الآتي:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

إن x_j هي الكمية من المنتج j و b_i هي الكمية التوفرة من المادة الخام i. أما a_{ij} فهي الكمية التي نحتاجها من المادة الخام i لصنع وحدة من النتج j. وتعني c_j الربح في وحدة المنتج j. إن الشروط في المسألة الثنائية والتي هي: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j$ تدلنا على أن y_j تعني سعر الوحدة من المادة الخام i. وبالتالي فإن البرنامج الأصلي يبحث في إيجاد أكبر ربح بينها البرنامج الثنائي يبحث في أقل تكلفة للإنتاج.

(٥, ٢) النظرية الأساسية في الثنائية Fundamental Theorm of Duality

سوف نقتصر في هذا الفصل على الشكل القياسي للمسألة الأصلية:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن المسألة المقابلة لها هي:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{aligned}$$

$\mathbf{w}$ بدون قيد

نظرية (١ , ٢ , ٥)

إذا كان $\mathbf{x}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للمسألة الأصلية وكان $\mathbf{w}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للمسألة المقابلة عندئذ يتحقق ما يلي:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{w}^T\mathbf{b} \tag{5.6}$$

البرهان

$$\mathbf{w}^T\mathbf{b} = \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

وذلك لأن $\mathbf{x} \geq 0 \quad , \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$.

(٢ , ٢ , ٥) نتيجة مبدأ الثنائية الضعيف WPD (The Weak Principle of Duality)

إذا كان $\mathbf{x}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للمسألة الأصلية وكان $\mathbf{w}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للمسألة المقابلة وإذا تحقق بالإضافة إلى ذلك أن:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b} \tag{5.7}$$

عندئذ يكون $\mathbf{x}$ حلاً أمثلياً بالنسبة للمسألة الأصلية و $\mathbf{w}$ حلاً أمثلياً بالنسبة للمسألة المقابلة.

البرهان

لو لم يكن $\mathbf{x}$ حلاً أمثلياً بالنسبة للمسألة الأصلية لوجد حل $\overline{\mathbf{x}}$ يتحقق من أجله:

$$\mathbf{c}^T\overline{\mathbf{x}} < \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$$

وهذا يتعارض مع النظرية (١,٢,٥). وبالمثل يمكن برهان أن $\mathbf{w}$ حلاً أمثلياً للمسألة المقابلة.

نظرية (٣,٢,٥)

لنفترض أن للمسألة الأصلية حلاً أساسياً أمثلياً مسموحاً به مصفوفته الأساسية $\mathbf{B}$. عندئذ يكون:

١- $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\ \mathbf{B}^{-1}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للمسألة المقابلة.

٢- $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$.

٣- $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\ \mathbf{B}^{-1}$ حلاً أمثلياً بالنسبة للمسألة المقابلة.

البرهان

١- إن $\mathbf{A} = [\mathbf{B},\mathbf{N}]$. بما أن $\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ حل أساسي أمثلي مسموح به، لذا فإن

$\mathbf{r}_\mathbf{N}^T \geq \mathbf{0}$ (انظر نظرية شرط الأمثلية)

ولكن

$$\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$$

وهذا يقتضي:

$$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq \mathbf{c}_\mathbf{N}^T$$

سوف نبين الآن أن $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}$ هو حل مسموح به بالنسبة للمسألة المقابلة، إن $\mathbf{A} = [\mathbf{B},\mathbf{N}]$ و $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\ \mathbf{B}^{-1}$ لذا فإن:

$$\mathbf{w}^T\mathbf{A} = \left[\mathbf{w}^T\mathbf{B},\ \mathbf{w}^T\mathbf{N}\right] = \left[\mathbf{c}_\mathbf{B}^T, \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right] \leq \left[\mathbf{c}_\mathbf{B}^T, \mathbf{c}_\mathbf{N}^T\right] = \mathbf{c}^T$$

وبالتالي $\mathbf{w}^T\mathbf{A} \le \mathbf{c}^T$ وهذا يعني أن $\mathbf{w}$ حل مسموح به بالنسبة للمسألة المقابلة.

٢- $\mathbf{w}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

٣- بما أن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$ لذا فإن $\mathbf{w}$ هو حل أمثلي بالنسبة للمسألة المقابلة حسب ما تنص عليه النتيجة.

إن هذه النظرية تبين أنه يمكن التوصل للحل الأمثل بالنسبة للمسألة المقابلة إذا ما تم الحصول على حل المسألة الأصلية بطريقة السمبلكس، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال (٤ , ٢ , ٥)

$$\begin{aligned}
&\min \quad -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\
&\qquad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

إن الحل الأمثل لهذا المثال يمكن الحصول عليه بطريقة السمبلكس كما هو موضح في الجدول التالي:

x_4	2	(2)	1	1	0	4
x_5	1	2	2	0	1	6
	−1	−4	−3	0	0	0

وبعد العمليات المحورية نحصل على الجدول النهائي التالي:

x_2	3/2	1	0	1	−1/2	1
x_3	−1	0	1	−1	1	2
	2	0	0	1	1	10

من النظرية (٣ , ٢ , ٥) نحصل على الحل الأمثل للمسألة المقابلة كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

وهذا يمثل الحل الأمثل للمسألة المقابلة. كما أننا نجده موضحاً في الجدول أعلاه تحت المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$، وذلك بعد ضربه في -1. كما نلاحظ أن $\mathbf{c}^{T}\mathbf{x} = \mathbf{w}^{T}\mathbf{b} = -10$.

(٥ , ٢ , ٥) نظرية متمّمة المكملة الضعيفة

The Weak Complementary Slackness (WCS)

ليكن $\mathbf{x}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للبرنامج المقابل. الشرط اللازم والكافي ليكون $\mathbf{x}$ حلاً أمثلياً بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حلاً أمثلياً بالنسبة للبرنامج المقابل؛ هو أن يتحقق ما يلي:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= 0 \\ (\mathbf{c}^{T} - \mathbf{w}^{T}\mathbf{A})\mathbf{x} &= 0 \end{aligned} \qquad (5.8)$$

البرهان

لندخل من قبيل الاختصار الرمزين التاليين:

$$\alpha = \mathbf{w}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}), \qquad \beta = (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$$

بما أن $\mathbf{x}$ حل مسموح به بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حل مسموح به بالنسبة للبرنامج المقابل لذا فإن $\alpha = 0, \ \beta \geq 0$؛ لأن $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$، $\mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ و $\mathbf{x} \geq 0$.
إذا افترضنا أن $\mathbf{x}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج المقابل، لذا فإن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$ وبالتالي فإن:

$$\alpha + \beta = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b} = 0$$

وحيث إن $\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0$ لذا لابد وأن يكون $\alpha = 0, \ \beta = 0$ مما يعني أن:

$$\mathbf{w}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0, \qquad (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$$

أي أن الشرطين قد تحققا.

وبالعكس إذا افترضنا أن الشرطين محققين، أي $\alpha = 0, \ \beta = 0$ لنتج عن ذلك أن $\alpha + \beta = 0$ أي أن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b} = 0$، وبالتالي فإن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$ وحسب النتيجة آنفة الذكر سيتضح أن $\mathbf{x}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج المقابل.

ملاحظة: إن النظرية الأخيرة ذات أهمية خاصة؛ وتتضح أهميتها إذا ما كتب الشرطان المذكوران على النحو التالي:

$$\begin{aligned} w_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}-b_i)=0 \quad & i=1,\ldots,m \\ (c_j-\mathbf{w}^T\mathbf{a}_j)x_j=0 \quad & j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

نستنتج من هذه النظرية العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} x_j>0 \quad & \Rightarrow \quad \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j=c_j \\ c_j>\mathbf{w}^T\mathbf{a}_j \quad & \Rightarrow \quad x_j=0 \\ w_i>0 \quad & \Rightarrow \quad \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}=b_i \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}>b_i \quad & \Rightarrow \quad w_i=0 \end{aligned}$$

مثال (٦ , ٢ , ٥)

لدينا البرنامج الأصلي الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5\geq 4 \\ & 2x_1-2x_2+3x_3+x_4+x_5\geq 3 \\ & x_i\geq 0 \quad i=1,\ldots,5 \end{aligned}$$

أوجد حلاً أمثلياً لهذا البرنامج مستعيناً بنظرية متمّمة المكملة الضعيفة.

الحل:

إن البرنامج المقابل هو:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4w_1 + 3w_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & w_1 + 2w_2 \le 2 \\ & w_1 - 2w_2 \le 3 \\ & 2w_1 + 3w_2 \le 5 \\ & w_1 + w_2 \le 2 \\ & 3w_1 + w_2 \le 3 \\ & w_i \ge 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

يحوي البرنامج المقابل متغيرين فقط، ولذا يمكن حله بسهوله بالطريقة البيانية فنحصل على الحل الأمثل الآتي:

$w_1 = 4/5, \quad w_2 = 3/5$

نطبق الآن نظرية متمّمة المكملة الضعيفة فنجد بعد تعويض الحل الأمثل للبرنامج المقابل في الشروط أن:

$\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=2$	
$\frac{4}{5}-\frac{6}{5}=-\frac{2}{5}<3 \Rightarrow x_2=0$	(الشرط الثاني في الملاحظة تحقق)
$\frac{8}{5}+\frac{9}{5}=\frac{17}{5}<5 \Rightarrow x_3=0$	(الشرط الثاني في الملاحظة تحقق)
$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}<2 \Rightarrow x_4=0$	(الشرط الثاني في الملاحظة تحقق)
$\frac{12}{5}+\frac{3}{5}=3$	

بما أن $w_i > 0$ أي أن الشرط الثالث في الملاحظة تحقق، لذا فإن:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 3$$

وحيث إن $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ لذا فإن:

$$x_1 + 3x_5 = 4$$
$$2x_1 + x_5 = 3$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_5 = 1$$

أي أن الحل الأمثل للبرنامج الأصلي هو $(1,0,0,0,1)$.

تؤدي المتغيرات الثنائية دوراً مشابهاً لمعاملات لاجرانج في حساب التفاضل. فمن المعلوم، أنه لحساب القيمة الصغرى للدالة $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ، حيث تخضع $\mathbf{x}$ للشروط التالية:

$$\mathbf{a}_i{}^T\mathbf{x} = b_i \text{ ،}$$

فإننا ندخل مايسمى معاملات لاجرانج w_i ونبحث عن القيمة الصغرى للدالة التالية غير المشروطة:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{m} w_i(b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x})$$

بشكل مشابه نكون الدالة التالية:

$$\ell(\mathbf{x},\mathbf{w}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T\mathbf{b} - \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

التي ندعوها دالة لاجرانج، وسنتعرف من خلالها على شرط لازم وكافٍ جديد للحلول الأمثلية للبرنامجين.

(٥,٢,٧) نظرية لاجرانج Lagrange Theorem

ليكن $\mathbf{x}_o$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للبرنامج الأصلي. وليكن $\mathbf{w}_o$ حلاً مسموحاً به بالنسبة للبرنامج المقابل. الشرط اللازم والكافي ليكون $\mathbf{x}_o$ حلاً أمثلياً

بالنسبة للبرنامج الأصلي. و $\mathbf{w}_\circ$ حلاً أمثلياً بالنسبة للبرنامج المقابل هو أن يتحقق ما يلي:

$$\ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}) \leq \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \leq \ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ) \tag{5.9}$$

حيث

$$\ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T\mathbf{b} - \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

البرهان:

نبين أن الشرط المذكور لازم، بما أن $\mathbf{x}_\circ$ حل أمثلي للبرنامج الأصلي، و $\mathbf{w}_\circ$ حل أمثلي للبرنامج المقابل لذا فإنه، حسب نظرية متمّمة المكملة ينتج:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_\circ = \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x}_\circ = \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \\
\ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x} \\
= \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} + (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A})\mathbf{x} \\
\geq \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} = \ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ)
\end{aligned}$$

حيث إن $\mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ و $\mathbf{x} \geq 0$. إذن:

$$\ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \leq \ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ)$$

بالمثل يمكن البرهان على أن:

$$\ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}) \leq \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ)$$

إذن:

$$\ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}) \leq \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \leq \ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ)$$

سوف نبين الآن أن شرط لاجرانج كافي:

$$
\begin{aligned}
& \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \le \ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ) \\
\Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_\circ + \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x}_\circ \le \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x} \\
\Rightarrow\ & 0 \le \mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\circ) - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\circ) \\
\Rightarrow\ & 0 \le (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\circ)
\end{aligned}
$$

نختار $\mathbf{x}$ كما يلي : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\circ + \mathbf{e}_j$ حيث $\mathbf{e}_j$ متجه وحده، عناصره أصفار ماعدا العنصر الذي ترتيبه j فهو واحد.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & 0 \le (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A})\mathbf{e}_j \\
\Rightarrow\ & 0 \le c_j - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{a}_j \\
\Rightarrow\ & \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{a}_j \le c_j \\
\Rightarrow\ & \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A} \le \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

إذن $\mathbf{w}_\circ$ حل مسموح به.

بالمثل

$$
\begin{aligned}
& \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}) \le \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \\
\Rightarrow\ & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_\circ)^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_\circ) \le 0
\end{aligned}
$$

نختار $\mathbf{w}$ كما يلي : $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\circ + \mathbf{e}_j$.

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\circ + \mathbf{e}_j$$

$$\Rightarrow \ (\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_o)^T \mathbf{e}_j \le 0$$

$$\Rightarrow \ b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_o \le 0$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{b} \le \mathbf{A}\mathbf{x}_o$$

إذن $\mathbf{x}_o$ حل مسموح به. سوف نبين الآن أن $\mathbf{x}_o$ حل أمثلي للبرنامج الأصلي، ولذا نعوض في شرط لاجرانج $\mathbf{w}=0,\ \mathbf{x}=0$ فنجد:

$$\begin{aligned}
& l(\mathbf{x}_o, \mathbf{w}_o) \le l(\mathbf{0}, \mathbf{w}_o) \\
\Rightarrow \ & \mathbf{c}^T \mathbf{x}_o + \mathbf{w}_o^T \mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T \mathbf{A}\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T \mathbf{b} \\
\Rightarrow \ & \mathbf{c}^T \mathbf{x}_o - \mathbf{w}_o^T \mathbf{A}\mathbf{x}_o \le 0 \\
\Rightarrow \ & \mathbf{c}^T \mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T \mathbf{A}\mathbf{x}_o
\end{aligned}$$

بشكل مشابه:

$$\begin{aligned}
& l(\mathbf{x}_o, \mathbf{0}) \le l(\mathbf{x}_o, \mathbf{w}_o) \\
\Rightarrow \ & \mathbf{c}^T \mathbf{x}_o \le \mathbf{c}^T \mathbf{x}_o + \mathbf{w}_o^T \mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T \mathbf{A}\mathbf{x}_o \\
\Rightarrow \ & 0 \le \mathbf{w}_o^T \mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T \mathbf{A}\mathbf{x}_o \\
\Rightarrow \ & \mathbf{w}_o^T \mathbf{A}\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T \mathbf{b}
\end{aligned}$$

أي أن:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T \mathbf{b} \tag{5.10}$$

ولكننا نعلم من نظرية مبدأ الثنائية الضعيف أن:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}_o \ge \mathbf{w}_o^T \mathbf{b} \tag{5.11}$$

إذن بالنظر الى (5.10) و (5.11) نجد أن $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_\circ = \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b}$ وحسب النتيجة ٥-٢-٢ ينتج

$$\begin{aligned} & 1(\mathbf{x}_o,\mathbf{0}) \leq 1(\mathbf{x}_o,\mathbf{w}_o) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o + \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \\ \Rightarrow\ & 0 \leq \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \\ \Rightarrow\ & \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \leq \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \leq \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \leq \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \leq \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

ولكننا نعلم من نظرية (١ , ٢ , ٥) مبدأ الثنائية الضعيف أن:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \geq \mathbf{w}_o^T\mathbf{b}$$

إذن:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_o = \mathbf{w}_o^T\mathbf{b}$$

وحسب نظرية (٣ , ٢ , ٥) من مبدأ الثنائية الضعيف ينتج أن $\mathbf{x}_o$ حل أمثلي للبرنامج الأصلي، و $\mathbf{w}_o$ حل أمثلي للبرنامج المقابل.

إن نظرية لاجرانج في صيغتها هذه، تعتبر تطبيقاً على البرمجة الخطية لنظرية مشهورة في البرمجة الخطية تعرف باسم نظرية كوهن-توكر Kuhn-Tucker.أنظر Collatz L. and Wetterling W. [8]).

(٥,٣) تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

في العديد من مسائل البرمجة الخطية تكون المعطيات غير دقيقه، لذا فمن الأهمية بمكان إيجاد الحل الأمثل للمسألة بعد توافر معطيات جديدة دون عناء حلها من جديد. كما أنه من الممكن أن تكون هناك أمور لم تؤخذ بعين الاعتبار أثناء صياغة المسألة. لهذا كله نجد لزاماً علينا تحري هذه الأمور ومعرفة مدى تأثير ذلك على قيمة دالة الهدف دون الحاجة إلى إعادة حل المسألة من جديد. وتعني الحساسية هنا هو، حساسية الحلول تجاه التغير في المعطيات.

ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.12}$$

ولتكن $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية التي أدت إلى الحل الأمثل لهذه المسألة. سوف نتابع الآن التغيرات الآتية التي يمكن أن تحدث على معطيات المسألة:

١ - تغير في معاملات دالة الهدف.

٢- تغير في الطرف الأيمن للشروط.

٣- تغير في مصفوفة الشروط.

٤ - إضافة متغير جديد.

٥ - إضافة شرط جديد.

في هذا الفصل سوف تقتصر دراستنا على النقاط ١، ٢، ٣، ٤، السابقة. ونترك النقطة الخامسة للقارئ (انظر Bazaraa [3]).

(١ ,٣ ,٥) تغير في معاملات دالة الهدف Changes in the Objective Coefficient

ليكن لدينا البرنامج الخطي (5.12) نود أن نعرف إلى أي مدى يمكننا تغيير c_s دون أن ينتج عن ذلك تغير في الحل الأمثل للبرنامج الخطي (5.12). إن المتجه:

$$\mathbf{c}^T = [c_1, c_2, \ldots, c_s, \ldots, c_n]$$

قد يتغير ليصبح:

$$\hat{\mathbf{c}}^T = [c_1, c_2, \ldots, c_s + \Delta c_s, \ldots, c_n]$$

لنفترض أن الجدول الأخير عند حل البرنامج الخطي (5.12) هو كما في (٣ ,٤):

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c}^{T*} & -z^* \end{bmatrix}$$

نظرية (١ ,٣ ,٥)

أ) إذا كان x_s متغيراً غير أساسي في $\mathbf{T}^*$ فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي (5.12)لن يتأثر لدى تغير c_s، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\Delta c_s \geq -c_s^* = -r_s$$

ب) إذا كان x_s متغيراً أساسياً في $\mathbf{T}^*$ فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي (5.12) لن يتأثر لدى تغير c_s، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\min_{j\in\Re}\left\{r_j/a_{kj}^* \ :a_{kj}^*>0\right\} \geq \Delta c_s \geq \max_{j\in\Re}\left\{r_j/a_{kj}^* \ :a_{kj}^*<0\right\} \qquad (5.13)$$

حيث k هو دليل الصف المقابل للمتغير الأساسي x_s. بينما $\Re$ ترمز إلى مجموعة أدلة المتغيرات غير الأساسية.

البرهان

لدينا الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى:

بما أن x_s متغير غير أساسي، لذا فإنه لن يحدث أي تأثير على $\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$. إن $\mathbf{a}_j$ تمثل أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$. ينتج عن ذلك أن $\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j=\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_j^*$. فإذا كانت $j\neq s$ فإن:

$$\begin{aligned}\hat{c}_j^* &= \hat{c}_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_j^* = c_j^* = r_j\end{aligned}$$

وأما إذا كانت $j=s$ فإن:

$$\begin{aligned}\hat{c}_s - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_s^* &= c_s + \Delta c_s - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_s^* \\ &= c_s^* + \Delta c_s \\ &= r_s + \Delta c_s\end{aligned}$$

فإذا كان $r_s + \Delta c_s \geq 0$ أي إذا كان $\Delta c_s \geq -r_s$ فإن الحل الأمثل قبل تغيير c_s يبقى أمثلياً بعد إجراء التغيير. ومما تجدر ملاحظته هنا هو أن قيمة x_s هي صفر، وذلك باعتباره متغيراً غير أساسي. إن هذا يعني أن قيمة دالة الهدف سوف لن تتأثر نتيجة للتغيير Δc_s.

الحالة الثانية

لنفترض الآن أن x_s متغيرٌ أساسيٌ في الجدول النهائي وأن $\hat{c}_s = c_s + \Delta c_s$ وبالتالي فإن:

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \Delta c_s \mathbf{e}_s \tag{5.14}$$

حيث $\mathbf{e}_s$ متجه الوحدة التالي:

$$\mathbf{e}_s^T = [0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0]$$

حيث يقع 1 في الموضع s. وبقصر المعادلة (5.14) على معاملات التكلفة النسبية المقابلة للمتغيرات الأساسية نحصل على المعادلة التالية:

$$\hat{\mathbf{c}}_\mathbf{B} = \mathbf{c}_\mathbf{B} + \Delta c_s \mathbf{e}_k \tag{5.15}$$

حيث c_s يقع في الموضع k من المتجه $\mathbf{c}_\mathbf{B}$ بعد حذف معاملات التكلفة النسبية المقابلة للمتغيرات غير الأساسية. سوف ندرس الحالات الثلاث التالية:

١ – إذا كان x_j متغيراً أساسياً وكان $j \neq s$.

٢ – إذا كان x_j متغيراً أساسياً وكان $j = s$.

٣ – إذا كان x_j متغيراً غير أساسي.

أولا: x_j متغير أساسي، حيث $j \neq s$.

بما أن x_j متغير أساسي، لذا فإن $c_j^* = r_j = 0$ وبالتالي فإن:

$$0 = c_j^* = c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j = c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_j^* \tag{5.16}$$

كما أن:

$$\hat{c}_j^* = \hat{c}_j - \hat{\mathbf{c}}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_j^*$$

ولكن $\hat{c}_j = c_j$ إذن:

$$\begin{aligned} \hat{c}_j^* &= c_j - (\mathbf{c}_\mathbf{B} + \Delta c_s \mathbf{e}_k)^T \mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_j^* - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^* \end{aligned}$$

ولكن من (5.16) نجد أن:

$$= 0 - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^*$$

وبما أن x_j متغير أساسي فإن:

$$\mathbf{a}_j^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث يقع 1 في الموقع $k \neq j$ ، وكذلك $\mathbf{e}_k$ متجه الوحدة حيث يقع 1 في الموقع k ، نستنتج من ذلك أن $\mathbf{e}_k^T\mathbf{a}_j^* = 0$ ، وبالتالي فإن $\hat{c}_j^* = 0$ أي أن هذه القيمة بقيت صفراً كما كانت سابقاً.

ثانياً: x_j متغير أساسي، حيث $j = s$.

بشكل مشابه للحالة الأول نجد أن:

$$\begin{aligned}\hat{c}_s^* &= \hat{c}_s - \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{a}_s^* = c_s + \Delta c_s - (\mathbf{c_B} + \Delta c_s\mathbf{e}_k)^T\mathbf{a}_s^* \\ &= c_s - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{a}_s^* + (\Delta c_s - \Delta c_s\mathbf{e}_k^T\mathbf{a}_s^*)\end{aligned}$$

ولكن $\mathbf{a}_s^*$ متجه الوحدة حيث يقع 1 في الموقع s ؛ وذلك لأن x_s متغير أساسي، وبالتالي فإن: $c_s = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{a}_s^*$ أي أن $c_s - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{a}_s^* = 0$ وبالتالي:

$$\hat{c}_s^* = \Delta c_s - \Delta c_s\mathbf{e}_k^T\mathbf{a}_s^*$$

من الواضح أن $\mathbf{e}_k^T\mathbf{a}_s = 1$ وبالتالي فإن:

$$\hat{c}_s^* = \Delta c_s - \Delta c_s$$

أي أن $\hat{c}_s^* = 0$ وهذا يعني أن قيمة c_s بقيت صفراً كما كانت سابقاً.

ثالثاً: x_j متغير غير أساسي.

من الطبيعي أن $j \neq s$ وإلا رجعنا إلى الحالة الأولى. في هذه الحالة $\hat{c}_j = c_j$ وكذلك $\hat{\mathbf{c}}_\mathbf{B} = \mathbf{c}_\mathbf{B} + \Delta c_s \mathbf{e}_k$ ثم أن:

$$\begin{aligned} \hat{c}_j^* &= \hat{c}_j - \hat{\mathbf{c}}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \left(\mathbf{c}_\mathbf{B} + \Delta c_s \mathbf{e}_k\right)^T \mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_j^* - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^* \end{aligned}$$

ولكن $c_j^* = c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_j^*$ وبالتالي:

$$\hat{c}_j^* = c_j^* - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^*$$

ولكن

$$\mathbf{a}_j^* = \begin{bmatrix} a_{1j}^* \\ \vdots \\ a_{kj}^* \\ \vdots \\ a_{mj}^* \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $\mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^* = a_{kj}^*$، نستنتج من ذلك أن:

$$\hat{c}_j^* = c_j^* - \Delta c_s a_{kj}^*$$

ولكي يبقى الحل الأمثل أمثلياً لابد أن نشترط أن $\hat{c}_j^* = c_j^* - \Delta c_s a_{kj}^* \geq 0$ فإذا كان $a_{kj}^* > 0$ فإن هذا الشرط هذا يكافئ أن $c_j^*/a_{kj}^* \geq \Delta c_s$، أما إذا كان $a_{kj}^* < 0$ فإن هذا الشرط يكافئ أن $c_j^*/a_{kj}^* \leq \Delta c_s$، وفي حالة $a_{kj}^* = 0$ فإن هذا الشرط يعني أن $c_j^* \geq 0$. إن الشروط المذكورة يمكن أن تصاغ على النحو التالي:

$$\min_{j \in \Re} \left\{ c_j^*/a_{kj}^* \ : a_{kj}^* > 0 \right\} \geq \Delta c_s \geq \max_{j \in \Re} \left\{ c_j^*/a_{kj}^* \ : a_{kj}^* < 0 \right\}$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

مثال (٢ , ٣ , ٥)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -9x_1 - 6x_2 - x_3 - 9x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 24 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_4 \leq 12 \\ & 69x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq 234 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج هو:

$$\begin{array}{lrrrrrrrr} x_3 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 12 \\ x_2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ x_7 & 39 & 0 & 0 & -30 & -4 & -3 & 1 & 102 \\ & 7 & 0 & 0 & 14 & 1 & 5 & 0 & 84 \end{array}$$

بما أن x_1 متغير غير أساسي لذا فإنه حسب النظرية ٥-٣-١ يمكننا تغيير c_1 بمقدار $-7 \leq \Delta c_1 < \infty$ دون أن يتأثر الحل الأمثل السابق، وتبقى دالة الهدف كما هي. أما بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية x_4, x_5, x_6 فيمكننا إجراء التغييرات الآتية:

$$\infty > \Delta c_6 \geq -5, \quad \infty > \Delta c_5 \geq -1, \quad \infty > \Delta c_4 \geq -14$$

أما بالنسبة للمتغير الأساسي x_3 فيمكننا إجراء التغييرات الآتية دون أن يتأثر الحل الأمثل:

$$\min_{j \in \Re}\{7/4, 1/1\} \geq \Delta c_3 \geq \max_{j \in \Re}\{-14/1, -5/1\}$$

أي:

$$1 \geq \Delta c_3 \geq -5$$

والتغير المسموح لـ c_2 هو:

$$7/2 \geq \Delta c_2 > -\infty$$

وأخيرا بالنسبة لـ c_7 نجد أن التغير المسموح به هو:

$$7/39 \geq \Delta c_7 \geq -1/4$$

ملاحظة: إن النظرية السابقة تنطبق في حالة إجراء تغيير على أحد معاملات دالة الهدف ولكنها لا تنطبق إذا كان التغيير يشمل عدة معاملات (انظر Bazaraa [3]).

(٥,٣,٢) تغير في الطرف الأيمن للشروط Changes in the Right-Hand Side

إذا أجرينا تغييرا في أحد عناصر الطرف الأيمن للشروط بأن نستبدل b_k مثلاً ونجعله $b_k + \Delta b_k$ فإن الطرف الأيمن يكتب على النحو التالي:

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{e}_k$$

حيث $\mathbf{e}_k$ متجه الوحدة الذي يحتوي على 1 في الإحداثي k.

إن مجموعة المتغيرات الأساسية المقابلة للحل الأمثل تصبح بعد إجراء هذا التغيير كما يلي:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{e}_k) \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k\end{aligned}$$

من هذه الصيغة يتضح أن مجموعة المتغيرات الأساسية لا تتغير طالما أن عناصر المتجه الآتي:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k$$

تبقى غير سالبة.

يجدر بنا أن ننوه هنا عن العلاقة بين الحساسية والثنائية، فالتغير في الدالة الهدف الناشئ عن التغير في $\mathbf{b}_k$ يمكن التعبير عنه على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
\Delta z &= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \Delta \mathbf{x}_{\mathbf{B}} \\
&= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T (\Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k) \\
&= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \Delta b_k \mathbf{e}_k \\
&= w^T \Delta b_k \mathbf{e}_k
\end{aligned}$$

إذن مقدار التغير في دالة الهدف؛ نتيجة للتغير Δb_k يساوي $w^T \Delta b_k \mathbf{e}_k$ حيث إن w هو الحل الأمثل للثنائية.

مثال (٥,٣,٣)

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 - x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 2000 \\
& 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 2880 \\
& 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 4000 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج هو:

x_3	−1/8	0	1	3/8	−1/4	0	30
x_2	15/16	1	0	−5/16	3/8	0	455
x_6	3	0	0	0	−1	1	1120
	5/64	0	0	9/64	1/32	0	1485/4

إذا كانت **B** هي المصفوفة الأساسية المقابلة للبرنامج الخطي السابق فإن:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 & 0 \\ -5/16 & 3/8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 455 \\ 1120 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

لإيجاد التغير المسموح به بالنسبة لـ b_1 نحسب:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_1 \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 455 \\ 1120 \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} 3/8 \\ -5/16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولكي يبقى $\mathbf{x_B}$ حلاً مسموحاً به، نجعل مركبات هذا المتجه غير سالبة، وبالتالي نجد أن:

$$30 + \Delta b_1 (3/8) \geq 0,$$
$$455 + \Delta b_1 (-5/16) \geq 0,$$
$$1120 + \Delta b_1 (0) \geq 0$$

وهذا يكافئ:

$$\Delta b_1 \geq -80, \qquad \Delta b_1 \leq 1456$$

إذن:

$$-80 \leq \Delta b_1 \leq 1456$$

وبشكل مشابه نجد أن:

$$-3640/3 \leq \Delta b_2 \leq 120$$

وكذلك:

$$-1120 \leq \Delta b_3 < \infty$$

ملاحظة: إذا كانت المسألة تتطلب استخدام طريقة المرحلتين فإن $\mathbf{B}^{-1}$ حينئذ تكون هي المصفوفة المقابلة للمتغيرات الأساسية في الجدول الأول الموسع (بعد إضافة المتغيرات الاصطناعية).

مثال (٤ , ٣ , ٥)

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -80\,x_1 - 60\,x_2 - 42x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + 3\,x_2 + x_3 \le 12 \\
& 5x_1 + 6\,x_2 + 3x_3 \ge 15 \\
& 2x_1 - 3\,x_2 + x_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

إن الجدول الأول الموسع هو:

x_4	2	3	1	1	0	0	0	12
y_1	5	6	3	0	−1	1	0	15
y_2	2	−3	1	0	0	0	1	8
	−7	−3	−4	0	1	0	0	−23

أما الجدول النهائي للمرحلة الثانية فهو:

x_2	0	1	0	1/6	0	0	−1/6	2/3
x_3	2	0	1	1/2	0	0	1/2	10
x_5	1	0	0	5/2	1	−1	1/2	19
	4	0	0	31	0	0	11	460

إن المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$ تقابل المتغيرات الأساسية x_4, y_1, y_2 (انظر الجدول الأول) وهي كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

فإذا أجرينا تغييراً في إحدى قيم b_1, b_2, b_3 فإن التغير المسموح به بالنسبة لكل من هذه القيم يكون:

$$\max\left\{\frac{-2/3}{1/6}, \frac{-10}{1/2}, \frac{-19}{5/2}\right\} \le \Delta b_1 < \infty$$

$$-\infty < \Delta b_2 \le \min\left\{\frac{-19}{-1}\right\}$$

$$\max\left\{\frac{-10}{1/2}, \frac{-19}{1/2}\right\} \le \Delta b_3 \le \min\left\{\frac{-2/3}{-1/6}\right\}$$

وهذا يكافئ:

$$-4 \le \Delta b_1 < \infty$$
$$-\infty < \Delta b_2 \le 19$$
$$-20 \le \Delta b_3 \le 4$$

(٥,٣,٣) إضافة متغير جديد Addition of a New Variable

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0, \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

ولنفترض أننا نود إضافة متغير جديد (كأن يكون منتج جديد نود تصنيعه). إن البرنامج الخطي الموسع سيأخذ حينئذ الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} \\
\text{s.t.} \quad & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} = b_m \\
& x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n+1
\end{aligned}$$

ما هو تأثير هذا المتغير الجديد على الجدول النهائي للبرنامج الأصلي؟ إذا كانت $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية المقابلة لهذا الجدول وكانت $\mathbf{c_B}$ عناصر متجه التكلفة المقابل فإن عنصر التكلفة الجديد في الجدول النهائي يعطى بالصيغة الآتية:

$$c^*_{n+1} = c_{n+1} - \mathbf{c}^T_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{n+1}$$

فإذا كانت هذه القيم غير سالبة فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي يبقى أمثلياً (ويكون $x_{n+1} = 0$). أما إذا كانت هذه القيم سالبة عندئذ لابد من الاستمرار في عمليات طريقة السمبلكس.

مثال (٥,٣,٥)

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1 + x_3 \leq 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج الخطي هو:

x_3	0	−1/5	1	3/5	−1/5	0	6/5
x_1	1	−3/5	0	−1/5	2/5	0	8/5
x_6	0	4/5	0	−2/5	−1/5	1	31/5
	0	2/5	0	9/5	2/5	0	48/5

إن المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$ تقابل المتغيرات الأساسية x_3, x_1, x_6 وهي كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

وأن:

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{T} = \begin{bmatrix} 6/5 & 8/5 & 31/5 \end{bmatrix}$$

لنفترض الآن أننا أدخلنا متغيراً جديداً هو x_7 مزوداً بالمعطيات الآتية:

$$\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c_7 = 3$$

بحساب الآن قيمة c_7^* نجد:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

وأن:

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{T} = \begin{bmatrix} 6/5 & 8/5 & 31/5 \end{bmatrix}$$

لنفترض الآن أننا أدخلنا متغيراً جديداً هو x_7 مزوداً بالمعطيات الآتية:

$$\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c_7 = 3$$

بحساب الآن قيمة c_7^* نجد:

$$c_7^* = c_7 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_7 = 3 - \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2$$

بما أن $c_7^* \geq 0$ لذا فإن الجدول النهائي يبقى أمثلياً ولا تأثير على الحل الأمثل بإدخال المتغير الجديد.

مثال (٦,٣,٥)

نعيد دراسة المثال السابق ولكن بالمعطيات الآتية:

$$\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_7 = -4$$

بحساب الآن قيمة c_7^* نجد:

$$c_7^* = c_7 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_7 = -4 - \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{4}{5}$$

بما أن $c_7^* < 0$، لذا فإن الجدول الموسع ليس أمثلياً ويتطلب الأمر متابعة خطوات السمبلكس على الجدول الموسع. للتوصل للجدول الموسع نحسب:

$$\mathbf{a}_7^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 7/5 \\ -4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

ولذا يكون الجدول الموسع كما يلي:

x_3	0	−1/5	1	3/5	−1/5	0	7/5	6/5
x_1	1	−3/5	0	−1/5	2/5	0	−4/5	8/5
x_6	0	4/5	0	−2/5	−1/5	1	7/5	31/5
	0	2/5	0	9/5	2/5	0	−4/5	48/5

بمتابعة خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_7	0	−1/7	5/7	3/7	−1/7	0	1	6/7
x_1	1	−5/7	4/7	1/7	2/7	0	0	16/7
x_6	0	1	−1	−1	0	1	0	5
	0	2/7	4/7	15/7	2/7	0	0	72/7

وبالتالي نحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_7 = 6/7,\ \ x_1 = 16/7,\ \ x_6 = 5$$

وقيمة دالة الهدف هي:

$$-3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_7 = -72/7$$

(٥,٣,٤) تغير في مصفوفة المعاملات Changes in the Coefficient Matrix

درسنا كيفية حل البرنامج الخطي في حالة التغير في معاملات دالة الهدف، الطرف الأيمن للشروط أو في حالة إضافة متغير جديد. وفي هذا الفصل سندرس حل البرنامج الخطي في حالة تغير مصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$. إن التغير في مصفوفة المعاملات يعتبر نسبياً بسيطاً إذا كان المعامل المراد تغييره a_{ij} مقابل لمتغير غير أساسي. أما إذا كان a_{ij} مقابل لمتغير أساسي فإن المسألة أكثر صعوبة، وفي هذه الحالة سنعيد فرز المصفوفة $\mathbf{A}$ ونعيد حل المسألة من جديد.

لتكن

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$$

هو حل أساسي مسموح به أمثلي للبرنامج الخطي في الحالة القياسية، إن التغير في المصفوفة $\mathbf{A}$ ينقسم إلى حالتين:

الحالة الأولى: المصفوفة $\mathbf{N}$ تتغير إلى $\mathbf{N}'$، وبالتالي فإن التغير في العمود $\mathbf{a}_k$ المقابل للمتغير غير الأساسي x_k سيؤثر على المتجه $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$، وبالتالي بشكل غير مباشر على r_k . ليكن $\mathbf{a}_k$ المتجه القديم المراد استبداله بالمتجه الجديد $\hat{\mathbf{a}}_k$، حيث $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_k$ تمثل المتجه الجديد في مصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$ بعد تعديله بواسطة معكوس المصفوفة الأساسية $\mathbf{B}^{-1}$، وبالتالي فإن:

$$\hat{r}_k = \mathbf{c_B}\hat{\mathbf{y}}_k - c_k = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_k - c_k$$

فإذا كانت $\hat{r}_k$ سالبة يجب مواصلة عملية السمبلكس مع إضافة متغير العمود ومعامل التكلفة النسبية الجديد لحل البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c_B}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_{N'}}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_{N'}} \\
\text{s. t.} \quad & \\
& \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N'}\mathbf{x_{N'}} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x_B}, \mathbf{x_{N'}} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

مثال (٧,٣,٥)

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -10\,x_1 - 7\,x_2 - 6x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 3x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 36 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 32 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 22 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج الخطي هو:

x_2	1	1	0	1	0	−1	14
x_5	−2	0	0	1	1	−3	2
x_3	1	0	1	−1	0	2	8
	3	0	0	1	0	5	146

إن المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$ تقابل المتغيرات الأساسية x_2, x_5, x_3 وهي كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لنفترض أنه حدث خطأ في نقل المعلومات، وأن a_{31} هو 1 بدلاً من 2. وهذا يعني أن

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وأن:

$$\hat{r}_1 = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{y}}_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 10 = -2$$

بما أن $\hat{r}_1 < 0$ ، لذا فإن الجدول السابق ليس أمثلياً، ويتطلب الأمر متابعة خطوات السمبلكس على الجدول السابق بعد تغيير $\mathbf{y}_1$ بـ $\hat{\mathbf{y}}_1$ ، ولذا يكون الجدول الجديد كما يلي:

x_2	2	1	0	1	0	−1	14
x_5	1	0	0	1	1	−3	2
x_3	−1	0	1	−1	0	2	8
	−2	0	0	1	0	5	146

بمتابعة خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	0	−1	−2	5	10
x_1	1	0	0	1	1	−3	2
x_3	0	0	1	0	1	−1	8
	0	0	0	3	2	−1	150

نتابع خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_6	0	1/5	0	−1/5	−2/5	1	2
x_1	1	3/5	0	2/5	−1/5	0	8
x_3	0	1/5	1	−1/5	3/5	0	12
	0	1/5	0	14/5	8/5	0	152

وبالتالي نحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_6 = 2,\ \ x_1 = 8,\ \ x_3 = 12$$

وقيمة دالة الهدف هي:

$$-10\,x_1 - 6\,x_3 + 0x_6 = -152$$

الحالة الثانية: المصفوفة الأساسية **B** تتغير إلى **B´**. وفي هذه الحالة فإن الحل الأمثل x^* قد يكون غير أساسي للبرنامج الخطي الجديد، وكذلك فإن **B´** قد تكون مصفوفة ليس لها معكوس، وبالتالي فإن حلاً مباشراً من الحل السابق قد لايكون من السهل الحصول عليه، ويفضل حل المسألة من جديد. (انظر [3] Bazaraa)

مثال (٨,٣,٥)

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2\,x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج الخطي هو:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
	0	−3	−1	−2	0	−12

لنفترض أن المتجه a_1 قد استبدل من $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ عندئذ:

$$\mathbf{B}^{-1}a_1' = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$$

$$c_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}a_1' - c_1 = \begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} - (-2) = -4$$

ولذا فإن عمود x_1 سوف يصبح $\begin{bmatrix}3\\9\\-4\end{bmatrix}$ كما يلي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	3	1	1	1	0	6
x_5	9	3	1	1	1	10
	−4	−3	−1	−2	0	−12

ومن ثم ينبغي الانتقال إلى جداول جديدة.

تمارين الباب الخامس

(٥,١) برهن نظرية متممة المكملة الضعيفة.

(٥,٢) اكتب البرنامج المقابل لكل ممايلي:

أ)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0 \\
& 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\
& x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0 \\
& 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\
& x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

ج)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z \\
\text{s. t.} \quad & \\
& z - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0 \\
& \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
& x \ge 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

د)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

استخدم نظرية الثنائية لتتأكد فيها إذا كان $x_1 = 3/2, \quad x_2 = 3/2$ هو الحل الأمثل لهذا البرنامج.

(٥,٣) أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية، وكذلك أوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل له:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(٥,٤) أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية، وكذلك أوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل له:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\
& 2x_1 + 3x_3 \le 5 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

(٥,٥) بالاستعانة بنظرية متمّمة المكملة الضعيفة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

(٥,٦) بالاستعانة بنظرية متمّمة المكملة الضعيفة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

(٥,٧) اعطيت البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الجدول النهائي لهذا البرنامج:

x_4	1	−1	1.5	0.5	0	0.5
x_1	0	0	−3.5	−0.5	1	0.5
	0	0	9.5	1.5	0	1.5

لنفرض أننا أضفنا متغير إضافي x_5 مع معامل التكلفة $c_5 = -1$ ومعاملات القيود $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1. \\ 2 \end{bmatrix}$ أوجد الحل الأمثل للبرنامج الجديد مستخدماً الحل في الجدول النهائي.

(٥,٨) اكتب البرنامج المقابل للبرنامج التالي وأوجد حله باستخدام نظرية متممة المكملة الضعيفة.

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & 3x_1 + 5x_2 \le 26 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٥ , ٩) لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج ثم اكتب البرنامج المقابل ثم حله.

(٥ , ١٠) اكتب البرنامج المقابل للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -4x_1 - 3x_2 + 12x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & -2x_1 - 3x_2 + 12x_3 \le -5 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \le -3 \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

ثم حله هندسياً ثم حل المسألة الأصلية باستخدام نظرية متمّمة المكملة الضعيفة.

(٥,١١) حل بطريقة السمبلكس البرنامج التالي مستخدماً قاعدة بلاند Bland's rule :

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 15 \\ & 2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

لنفرض أننا أضفنا متغير إضافي x_6 مع معامل التكلفة $c_6 = -1$ ومعاملات القيود $\mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$، أوجد الحل الأمثل للبرنامج الجديد مستخدماً الحل الذي حصلت عليه من البرنامج الأصلي.

(٥,١٢) أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي ثم أوجد اعتماداً على ذلك الحل الأمثل للبرنامج المقابل:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + 2x_3 \geq 4 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(١٣ , ٥) حل البرنامج التالي بطريقة السمبلكس :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

ثم أوجد مقدار التغير على قيم $i = 1,2,3,4,5$ c_i بحيث يبقى الحل الأمثل كما هو.

(١٤ , ٥) كيف يتأثر الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي عندما يتغير c_1 من 1 إلى 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
\text{s. t.} \quad & \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

حيث

$$, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 32 \\ 33 \\ 35 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}،$$

$$\mathbf{c} = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

(٥ ,١٥) فيما يلي الجدول الابتدائي والنهائي لحل برنامج خطي بطريقة السمبلكس:

x_8	4	0	8	-8/3	4/3	-8/3	0	1	20/3
x_2	-6	1	-11	10/3	-4/3	23/3	0	0	16/3
x_7	7/3	0	38/3	-41/9	16/9	-5/9	1	0	134/9
	-46	0	-64	41	-16	47	0	0	-5

x_5	3	0	6	-2	1	-2	0	3/4	5
x_2	-2	1	-3	2/3	0	5	0	1	12
x_7	-3	0	2	-1	0	3	1	-4/3	6
	2	0	32	9	0	15	0	12	75

أ) أوجد مدى التغير لمعاملات التكلفة النسبية دون التغير في قيمة الحل الأمثل.

ب) برهن أنه إذا كان x_s متغير غير أساسي فإن الحل الأمثل لن يتغير لدى تغير c_s إذا تحقق الشرط $\Delta c_s \geq -c_s^* = -r_s$.

(٥ ,١٦) ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}$$

أ) ماهو المجال المسموح به للتغير Δb_1 دون أن تتبدل المتغيرات الأساسية الأمثلية للبرنامج المذكور.

ب) ماهو المجال المسموح به للتغير Δc_1 دون أن يتأثر الحل الأمثل للبرنامج المذكور.

ج) ماهو المجال المسموح به للتغير Δc_2 دون أن يتأثر الحل الأمثل للبرنامج المذكور.

د) لنفرض أننا أدخلنا في البرنامج السابق متغيراً جديداً $x_6 \ge 0$ مزوداً بالمعطيات التالية $c_6 = 1$، $a_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$، ماهو تأثير ذلك على الجدول النهائي للبرنامج المذكور.

(١٧ , ٥) ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\
& x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

أ) باستخدام موضوع الحساسية جد الحل الأمثل الجديد عندما يتغير معامل x_2 في دالة الهدف من 1 إلى 5.

ب) إذا كان لك أن تختار بين أن تجري زيادة في b_1 أو في b_2، فأيهما تختار؟ ما تأثير ذلك على القيمة الأمثلية لدالة الهدف؟

(٥ , ١٨) الجدول التالي هو الجدول النهائي للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

x_1	1	2	2	1	0	8
x_5	0	3	3	1	1	12
	0	3	3	2	0	16

أ) هل يتغير الحل الأمثل عند إضافة المتغير الجديد x_6 المزود بالمعطيات التالية:

$$. \ a_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \ \text{،} c_6 = 5$$

ب) ماهو المجال المسموح به للتغير Δb_1 دون أن تتبدل المتغيرات الأساسية الأمثلية للبرنامج المذكور.

الفصل السادس

حل بعض البرامج الخطية الخاصة

Solutions of Some Special Linear Programming Problems

(٦ , ١) مقدمة Introduction

نقدم في هذا الباب دراسة لبعض البرامج الخطية العملية والتي سيتضح من خلال الدراسة الوافية أن حل مثل هذه المسائل بطريقة السمبلكس العادية لن يكون ذا جدوى. بل إن كل واحدة من هذه المسائل العلمية تحتاج إلى تطوير خوارزمية خاصة بها، وذلك بالاستفادة من طبيعة المسألة التي تحت الدراسة. سنبدأ الدراسة بمعالجة مشكلة النقل ثم ننتقل إلى مشكلة التوظيف فمشكلة تحليل الشبكات.

(٦ , ٢) مسألة النقل The Transportation Problem

لو فرضنا أن لدينا m مركز إنتاج $1,\dots,m$، المركز i ينتج a_i وحدة من المنتج. توزع هذه المنتجات على n مركز توزيع $1,\dots,n$. يحتاج مركز التوزيع j إلى b_j وحدة من المنتج. نستعرض فيما يلي بعض الفرضيات المتعلقة بمسألة النقل:

* الكميات $a_i, b_j > 0$ دائما موجبة.
* لكل مركز إنتاج i ومركز توزيع j نرمز لتكلفة نقل الوحدة من المركز i إلى المركز j بالرمز c_{ij}.
* المسألة المطلوب حلها هي تحديد الحل المسموح به الذي من خلاله نحصل على أقل تكلفة لنقل البضائع بين مراكز الإنتاج ومراكز التوزيع.
* ليكن x_{ij} عدد الوحدات التي سوف يتم نقلها بين المركزين (i, j).
* لنفرض أن النظام في مشكلة النقل هو نظام متوازن، أي أن جميع الكميات المنتجة تستهلك أي أن

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

البرنامج الخطي الذي يمثل مسألة النقل يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{array}{l}
\min \quad c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \\
\text{s. t.} \\
\begin{array}{lllll}
x_{11} + \cdots + x_{1n} & & & & = a_1 \\
& x_{21} + \cdots + x_{2n} & & & = a_2 \\
& & \ddots & & = \vdots \\
& & & x_{m1} + \cdots + x_{mn} & = a_m \\
x_{11} & + x_{21} & & \cdots + x_{m1} & = b_1 \\
\ddots & \ddots & & \ddots & = \vdots \\
x_{1n} & + x_{2n} & & \cdots + x_{mn} & = b_n \\
\multicolumn{4}{l}{x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}} & \geq 0
\end{array}
\end{array}$$

من الممكن كتابة مسألة النقل على شكل مصفوفي إذا جعلنا:

$$\mathbf{x} = \left(x_{11},\ldots,x_{1n},x_{21},\ldots,x_{2n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn} \right)^T$$
$$\mathbf{c} = \left(c_{11},\ldots,c_{1n},c_{21},\ldots,c_{2n},\ldots,c_{m1},\ldots,c_{mn} \right)^T$$
$$\mathbf{b} = \left(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n \right)^T$$
$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_{11},\ldots,\mathbf{a}_{1n},\mathbf{a}_{21},\ldots,\mathbf{a}_{2n},\ldots,\mathbf{a}_{m1},\ldots,\mathbf{a}_{mn} \right)$$

بحيث إن $\mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$، $\mathbf{e}_i$ متجه الوحدة في $\Re^m$، أي واحد في الموقع i وأصفار في باقي المواقع و $\mathbf{e}_j$ متجه الوحدة في $\Re^n$، أي واحد في الموقع j وأصفار في باقي المواقع. وبذا تأخذ مسألة النقل الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

حيث المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات البعد $(m+n)\times mn$ لها الشكل التالي:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

حيث **1** هو متجه صفي ذو بعد n مكّون من وحدان و **I** عبارة عن مصفوفة الوحدة ذات البعد $n \times n$. إن البنية الخاصة لمصفوفة المعاملات **A** هي التي أعطت مسألة النقل هذا الاهتمام الخاص.

(١ , ٢ , ٦) خصائص المصفوفة A Properties of the matrix A

سنوضح في هذا البند الخصائص المميزة لمصفوفة مشكلة النقل وسنوضح بنيتها الخاصة وسنبين كيفية الاستفادة من هذه البنية لتكوين خوارزمية خاصة بمشكلة النقل.

نظرية (الخاصة الأولى) (١ , ٢ , ٦)

رتبة Rank مصفوفة النقل هي $\text{Rank }(A) = m + n - 1$.

البرهان

بما أن **A** هي مصفوفة من النوع $(m+n) \times mn$ وحيث إن $m + n \leq mn$ لذا فإن $\text{Rank }(\mathbf{A}) \leq m + n$ من الواضح أن $\text{Rank }(\mathbf{A}) \neq m + n$ إذ إن:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{6.1}$$

وكذلك

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.2}$$

وحيث إن النظام متزن ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) ، لذا فإن الطرفين الآخرين من المعادلتين (6.1) و(6.2) متساويان أي أن هناك $m+n$ صفاً مرتبطة خطياً.

لإثبات أن $\text{Rank}\,(\mathbf{A}) = m+n-1$ علينا إيجاد مصفوفة جزئية من $\mathbf{A}$ غير شاذة من النوع $(m+n-1)\times(m+n-1)$. للوصول لهذا الغرض نلجأ إلى إهمال الصف الأخير من المصفوفة $\mathbf{A}$.

نحصل على مصفوفة من الشكل:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة غير شاذة؛ لأنها مثلثية علوية عناصرها القطرية تساوي الواحد بالتالي محددتها تساوي الواحد.

تعريف (٦,٢,٢)

تدعى المصفوفة $\mathbf{A}$ مصفوفة ذات معيارية أحادية كليه Total Unimodularity إذا كانت قيمة محددة أي مصفوفة مربعة جزئية من $\mathbf{A}$ هي إما ± 1 أو 0 .

نظرية (الخاصة الثانية) (٦,٢,٣)

$\mathbf{A}$ مصفوفة ذات معيارية أحادية كليه.

البرهان

من الواضح أن كل مصفوفة جزئية من $\mathbf{A}$ من النوع 1×1 ذات محددة إما 1 أو 0 . بالإضافة إلى هذا فإن أي مصفوفة جزئية من النوع $(m+n)\times(m+n)$ محددتها تساوي الصفر؛ وذلك لأن $\text{Rank}\,(\mathbf{A}) = m+n-1$ ، لذا يبقى علينا إثبات أن أي

مصفوفة جزئية من النوع $k \times k$ حيث $1 < k < m+n$ تحقق الخاصة المطلوبة. نقدم برهاناً يرتكز على مبدأ الاستقراء الرياضي، بافتراض أن $\mathbf{A}_k$ هي أي مصفوفة مربعة جزئية من النوع $k \times k$ ونود إثبات أن $\text{Det } \mathbf{A}_k = 0 \ \ or \ \ \pm 1$، سنفرض أن الخاصة محققة من أجل المصفوفة $\mathbf{A}_{k-1}$ وسنبرهن صحتها من أجل المصفوفة $\mathbf{A}_k$. إن كل عمود من أعمدة $\mathbf{A}_k$ إما أن يحوي عنصراً واحداً قيمته 1، أو أنه لا يحوي عناصر غير صفرية، أو أن يكون هناك عنصران غير صفريين قيمة كل منهما 1. إذا لم يكن هناك عناصر غير صفرية في كل عمود من أعمدة $\mathbf{A}_k$ عندئذ يكون $\text{Det } \mathbf{A}_k = 0$. أما إذا احتوى كل عمود على عنصرين غير صفريين فإن أحد العناصر غير الصفرية سيكون ضمن عمود من أعمدة المصادر (مراكز الإنتاج) في حين العنصر الآخر سيكون ضمن عمود من أعمدة مراكز التوزيع، وحيث إن مجموعة أعمدة المصادر مساوية لمجموعة أعمدة مراكز التوزيع، لذا فإن أعمدة $\mathbf{A}_k$ غير مستقلة خطياً، ونتيجة لذلك فإن $\text{Det } \mathbf{A}_k = 0$. أما إذا كان هناك عنصر واحد غير صفري في بعض أعمدة $\mathbf{A}_k$ فإنه في هذه الحالة يمكننا فك المحدد بناء على ذلك العمود أي:

$$\text{Det } \mathbf{A}_k = \pm \text{Det } \mathbf{A}_{k-1}$$

ولكن من الاستقراء الرياضي $\text{Det } \mathbf{A}_{k-1} = \pm 1$ أو 0 ، وهذا يعني أن هذه الخاصة أيضا صحيحة لـ $\mathbf{A}_k$.

نظرية (الخاصة الثالثة) (٤ , ٢ , ٦)

جميع المصفوفات الأساسية لمشكلة النقل هي مصفوفات مثلثية علوية.

البرهان

بما أن $\mathbf{A}$ هي مصفوفة ذات معيارية أحادية كلية Total Unimodularity، لذا فإن مصفوفة الأساس $\mathbf{B}$ لابد وأن يكون أحد أعمدتها على الأقل يحوي عنصراً غير صفري وحيد ذات قيمة 1، وإلا فإن $\text{Det}\ \mathbf{B} = 0$. بتبديل صفوف وأعمدة المصفوفة $\mathbf{B}$ نجد إنه بالإمكان إعادة كتابتها على الشكل:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{m+n-2} \end{bmatrix}$$

بإجراء نفس المناقشة على المصفوفة $\mathbf{B}_{m+n-2}$ نجد إنه بالإمكان كذلك إعادة كتابتها على الشكل:

$$\mathbf{B}_{m+n-2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

بوضع $\mathbf{q} = (q_1, \mathbf{q}_2)$ حينئذ تصبح المصفوفة $\mathbf{B}$ على الشكل:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & \mathbf{q}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

وبتكرار هذه الخطوات نجد أن المصفوفة **B** هي مصفوفة مثلثية علوية.

ملاحظة: إن أهمية هذه النظرية تكمن في صلتها بفكرة التعويض الخلفي Back substitution، ولهذا فإن استخدام طريقة السمبلكس دون إجراء تعديلات ملائمة لهذا الوضع الخاص سيكون مضيعة كبيرة للجهد والوقت، ومن هنا ظهرت ضرورة استخدام خوارزمية خاصة لهذه المشكلة.

تعريف (٦,٢,٥)

نقول بأن مسألة البرمجة الخطية جيدة التعريف Well defined إذا كان لها حل مسموح به دوماً.

نظرية (٦,٢,٦)

مشكلة النقل جيدة التعريف.

البرهان

بافتراض شرط الاتزان $\left(\sum_i a_i = \sum_j b_j\right)$ فمن الواضح أن:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$$

حيث $d = \sum_i a_i = \sum_j b_j$ يمثل حلا مسموحا به.

نظرية (٦,٢,٧)

إذا كانت المصفوفة **B** مصفوفة أساسية، وكان $\mathbf{a}_i$ عموداً غير أساسي من أعمدة مصفوفة النقل فإن مركبات المتجه $\mathbf{a}_i^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_i$ هي إما 0 أو -1 أو $+1$.

البرهان

المتجه $\mathbf{a}_i^*$ هو حل للمعادلة $\mathbf{B}\mathbf{a}_i^* = \mathbf{a}_i$. وبالتالي فإنه باستخدام قاعدة كرامر Cramer's rule نحصل على:

$$a_{ik}^* = \frac{\text{Det } \mathbf{B}_k}{\text{Det } \mathbf{B}}$$

وبما أن $\mathbf{B}_k$ مصفوفة مربعة جزئية من $\mathbf{A}$، وبما أن $\mathbf{A}$ مصفوفة ذات معيارية أحادية كلية، لذا فإن $\text{Det } \mathbf{B}_k = \pm 1$ أو 0، وبالتالي فإن $a_{ik}^* = 0, \mp 1$.

(٦, ٢, ٢) شرط الحل الصحيح Integrality condition

بما أن المصفوفة الأساسية $\mathbf{B}$ تتكون من أعداد صحيحة، وبما أنها مصفوفة مثلثية علوية عناصرها القطرية 1+ (انظر الخاصة الثالثة من خصائص مصفوفة المعاملات)، لذا فإن كل المتغيرات الأساسية ستكون أعداد صحيحه Integers طالما أن جميع الكميات المطلوبة والكميات المعروضة أعداد صحيحة. في هذه الحالة فإن الحل الأمثل سيكون عدداً صحيحاً أيضاً.

ملاحظة: إن معرفة مثل هذه الشروط التي توضح متى يكون الحل الأمثل صحيحاً أمر في غاية الأهمية، إذ إن هناك العديد من المسائل العملية التي تتطلب أن يكون الحل عدداً صحيحاً. فإذا كانت الشروط متوفرة، كما هو الحال في الوضع المبين أعلاه، فإن المسألة لن تحتاج إلى الخوارزميات الخاصة بالبرمجة الصحيحة Integer Programming.

(٦، ٢، ٣) ثنائية مشكلة النقل Duality for Transportation problems

مشكلة النقل هي مشكلة برمجة خطية بالشكل القياسي Standard form، وبالتالي باستخدام الشكل القياسي للثنائية نستطيع كتابة مسألة الثنائية لمسألة النقل. يوجد هناك متغير ثنائي لكل قيد من قيود المشكلة الأصلية، وباستخدام المتغيرات:

$$u_i \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$v_j \quad j = 1, \ldots, n,$$

وبالتالي فإن ثنائية مسألة النقل تأخذ الشكل التالي:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$
$$\text{s. t.}$$
$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

u_i, v_j, بدون قيود

(٦، ٢، ٤) طريقة السمبلكس لمشكلات النقل

Simplex Method for Transportation problems

بعد هذه الدراسة لخصائص بنية مشكلة النقل يمكننا الآن البدء في دراسة تفاصيل طريقة السمبلكس لحل هذه المسألة. سنركز اهتمامنا على الاستفادة الكاملة من خاصية الصيغة المثلثية العلوية لمشكلة النقل، وذلك من أجل تطوير خوارزمية خاصة بهذه المسألة سنطلق عليها اسم خوارزمية النقل Transportation Algorithm.

سنلاحظ أن هذه الخوارزمية والتي نحن بصدد تطويرها ماهي إلا نسخة معدلة من خوارزمية السمبلكس المحسنة Revised Simplex method والتي تتكون كما نعلم سابقاً من الخطوات الرئيسة التالية:

• إيجاد حل أساسي مسموح به .

• حساب مضاريب السمبلكس وحساب معاملات التكلفة النسبية للمتغيرات غير الأساسية.

• إجراء التعديلات على المتجه الداخل للمصفوفة.

فيما يلي سنوضح كيفية إجراء الخطوات أعلاه في حالة مشكلة النقل، وذلك بالاستفادة الكاملة من خصائص ونظريات مصفوفة المعاملات وستكون محصلة عملنا هذا هو خوارزمية النقل .

خوارزمية الركن الشمالي- الغربي Northwest Corner Rule

سنعرض فيما يلي شرح خوارزمية الركن الشمالي-الغربي Northwest corner rule لإيجاد حل أساسي مسموح به لمشكلة النقل، والتي تؤكد النظرية ٦-٢-٦ على وجود هذا الحل دوماً.

١- ابدأ بالخلية الواقعة في الركن الأيسر العلوي واملأها بأكبر كمية متوافقة مع صف وعمود تلك الخلية.

٢- كرر مايلي:

إذا كان هناك مزيد من متطلبات الصف:

* انتقل خلية واحدة نحو اليمين واملأها بأكبر كمية متوافقة مع صفها وعمودها.

أو

*انتقل خلية واحدة نحو الأسفل واملأها بأكبر كمية متوافقة مع صفها وعمودها.

حتى تتحقق جميع المتطلبات.

مثال (٨ , ٢ , ٦)

اعتبر مسألة النقل بأربعة مصادر وخمسة مراكز توزيع والمعرفة كما يلي:

$$\mathbf{a} = (30,80,10,60)$$
$$\mathbf{b} = (10,50,20,80,20)$$
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي نجد حلاً أساسياً مسموحاً به كما هو موضح بالجدول الآتي:

						a_i
	10	20				30
		30	20	30		80
				10		10
				40	20	60
b_j	10	50	20	80	20	

ملاحظة: عدد المتغيرات الأساسية هو $m+n-1$، ولكن قد يحصل أحياناً في بعض المسائل أن متطلبات كل من الصف والعمود تكون محققة عند خلية ما، وبالتالي فإننا نضع القيمة صفر في الخلية التالية (والتي نصل إليها بالانتقال خلية واحدة نحو اليمين أو نحو الأسفل) إن وجود الصفر سيجعل الحل غير منتظم Degenerate. انظر المثال التالي. في مثل هذه الحالة نتعامل مع الصفر كما يتم التعامل مع أي عدد موجب.

مثال (٩ , ٢ , ٦)

اعتبر مسألة النقل بأربعة مصادر وأربعة مراكز. إن الحل المسموح لها يعطى بالجدول التالي:

					a_i
	30				30
	20	20			40
		0	20		20
			20	40	60
b_j	50	20	40	40	

في مثل هذه الحالة نتعامل مع الصفر كما يتم التعامل مع أي عدد موجب.

حساب مضاريب السمبلكس ومعاملات التكلفة النسبية

بوضع $\mathbf{d}^T=[\mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}^T]$ حيث u_i تمثل المضروب المرافق للقيد:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

و v_j تمثل المضروب المرافق للقيد:

$$.\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

وبما أن أحد هذه القيود هو قيد إضافي Redundant، فإنه يمكننا وضع قيمة اختيارية لواحد من هذه المضاريب، ولقد جرت العادة على وضع $v_n = 0$. بافتراض أن $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية، فإن مضاريب السمبلكس توجد بحل النظام $\mathbf{d}_\mathbf{N}^T\mathbf{B} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T$. فيما يلي سنوضح كيفية حل مجموعة المعادلات هذه بشكل بسيط.

ليكن x_{ij} متغيراً أساسياً. إن العمود المقابل في المصفوفة $\mathbf{A}$ سيكون ضمن الأساس $\mathbf{B}$، وسيحوي هذا العمود على عنصرين قيمتهما 1+ وباقي عناصره أصفار، حيث سيكون هناك عنصر غير صفري ذو قيمة 1+ في الوضع i من الجزء العلوي وسيكون هناك عنصر غير صفري آخر ذو قيمة 1+ في الوضع j من الجزء السفلي. بالتالي فإن:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

والتي تمثل مجموعة المعادلات التي يمكن استخدامها لإيجاد مضاريب السمبلكس $\mathbf{d}$.

ملاحظة: إذا كانت c_{ij} جميعها أعداداً صحيحة وإذا كانت القيمة الاختيارية لأحد مضاريب السمبلكس أيضا عدداً صحيحاً، فإن مضاريب السمبلكس ستكون أعداداً صحيحة.

سنبين الآن كيفية حساب معاملات التكلفة النسبية. بعد تحديد مضاريب السمبلكس يمكننا حساب معاملات التكلفة النسبية Relative Cost Coefficients للمتغيرات غير الأساسية، وذلك باستخدام العلاقة:

$\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ (انظر خوارزمية السمبلكس المحسنة)

بتعويض عن قيمة $\mathbf{N}$ و $\mathbf{d}$ نجد أن المعادلة السابقة مكافئة للمعادلات:

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

يمكننا تلخيص خوارزمية حساب مضاريب السمبلكس بالخطوات التالية:

١ - ابدأ بقيمة اختيارية لأحد مضاريب السمبلكس (جرت العادة بوضع $v_n = 0$).

٢ - كرر الآتي:

• ابحث عن العنصر c_{ij} (عادة محاط بقوسين) المقابل لمتغير أساسي بحيث إن إحدى القيمتين إما u_i أو v_j قد حسبت لهذا العنصر.

• احسب القيمة غير المحددة باستخدام المعادلة:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

حتى يتم تحديد جميع قيم المضاريب.

مثال (١٠ , ٢ , ٦)

لقد سبق لنا في المثال (٨ , ٢ , ٦) أن وجدنا حلاً مسموحاً به باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي، إن العنصر c_{ij} المقابلة للمتغيرات الأساسية أظهرناها بوضوح، وذلك بأن أحطناه بقوسين، كما هو موضح في الجدول التالي:

						u_i
	(3)	(4)	6	8	9	5
	2	(2)	(4)	(5)	5	3
	2	2	2	(3)	2	1
	3	3	2	(4)	(2)	2
v_j	-2	-1	1	2	0	

نستخدم المعادلة $u_i + v_j = c_{ij}$ فنجد:

$$u_4 + v_5 = 2$$
$$u_4 + v_4 = 4$$
$$u_3 + v_4 = 3$$
$$u_2 + v_4 = 5$$
$$u_2 + v_3 = 4$$
$$u_2 + v_2 = 2$$
$$u_1 + v_2 = 4$$
$$u_1 + v_1 = 3$$

بوضع $v_5 = 0$ نحصل على $c_{45} = u_4 + v_5$ $\Leftarrow$ $u_4 = 2$، ومن ثم $v_4 = 2$،
وهكذا نحصل على جميع قيم u_i, v_j

$$u_1 = 5, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 2,$$
$$v_1 = -2, \quad v_2 = -1, \quad v_3 = 1, \quad v_4 = 2, \quad v_5 = 0,$$

الآن باستخدام العلاقات:

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

يمكننا حساب معاملات التكلفة النسبة وهي:

0	0	0	1	4
1	0	0	0	2
3	2	0	0	1
3	2	−1	0	0

r_{ij}

حيث إن المتغير x_{43} ذو معامل تكلفة سالب، لذا فهو المتغير الداخل للأساس.

خوارزمية إجراء التعديلات على المتجه الداخل للأساس

إذا كان معامل التكلفة النسبي المقابل لمتغير غير أساسي سالباً، فهذا يعني أن ذلك المتغير يمكن إدخاله إلى الأساس. سنوضح فيما يلي التغيرات التي يجب إجراؤها على المتغيرات الأخرى.

إذا كانت قيمة المتغير الداخل هي θ فإن المتغير الذي سيحصل على متغيرات الأساس هي صفر أو $\pm\theta$.

وبذا فإننا نتبع الخطوات التالية لإجراء التغيرات المطلوبة على المتجه الداخل للأساس.

١- في مكان المتغير الداخل نضع إشارة + (أي سيضاف مقدار θ في ذلك المكان) ثم نحدد إشارة متغيرات دورة تبدأ من المتغير الداخل وتنتهي به وذلك بوضع إما إشارة + أو − أو صفر، وذلك بناء على شرط الاتزان إي إذا أضيف مقدار فلابد من طرح ذلك المقدار في الصف والعمود الواقع فيه ذلك المقدار.

٢- نحدد قيمة θ بحيث تكون مساوية لأقل قيمة مطلقة لتلك المتغيرات الأساسية ذات الإشارة السالبة.

مثال (١١ , ٢ , ٦)

حدد المتغير الداخل للأساس وكذلك المتغير الخارج في مسألة النقل التالية:

							a_i
	4		7		5		30
	2		4		3		20
b_j		15		10		25	

أولاً: قاعدة الركن الشمالي الغربي.

15	10	5	30
		20	20
15	10	25	

ثانياً: لتحديد المتغير الداخل للأساس نحسب u_i و v_j من المعادلات التالية:

$$u_2+v_3=3,\quad u_1+v_3=5,\quad u_1+v_2=7,\quad u_1+v_1=4$$

ثم نختار $v_3=0$ فنجد $u_2=3$، $u_1=5$، $v_2=2$، $v_1=-1$

نعوض هذه القيم فيما يلي:

$$c_{21}-z_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)=2-(3-1)=0$$

$$c_{22}-z_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=4-(3+2)=-1$$

بما أن $c_{22}-z_{22}<0$، لذا فإن x_{22} هو المتغير الذي يدخل للأساس.

ثالثاً: لتحديد المتغير الخارج نحسب في البداية θ وفقاً للجدول التالي:

15	10	5	30
		20	20
15	10	25	

فنجد $\theta=\min\{10,20\}=10$ ، وهكذا فإن x_{12} هو المتغير الذي سيخرج من الأساس.

رابعاً: نحسب الأساس الجديد، وذلك كما يلي:

$$x_{22}=\theta=10$$

$$x_{12}=10-\theta=10-10=0$$

$$x_{13}=5+\theta=5+10=15$$

$$x_{23}=20-\theta=20-10=10$$

وبذا يصبح الجدول كما يلي:

15		15	30
	10	10	20
15	10	25	

وبذا تكون المرحلة الأولى قد انتهت لتبدأ مرحلة جديدة مماثلة.

لمقارنة التكلفة الإجمالية نجد أن:

التكلفة الإجمالية في حالة الركن الشمالي الغربي هي:

$$z_2 = (4)(15) + (7)(10) + (5)(5) + (3)(20) = 215$$

التكلفة الإجمالية في نهاية المرحلة الأولى هي:

$$z_2 = (4)(15) + (5)(15) + (4)(10) + (3)(10) = 205$$

أي أنه أمكن تقليل التكلفة الإجمالية.

مثال (١٢ , ٢ , ٦)

باعتبار المثال التالي حيث x_{53} هو المتغير الداخل:

						a_i
			10^0			10
			20^-		10^+	30
	20^+	10^0			30^-	60
	10^0					10
	10^-		$+$	40^0		50
b_j	40	10	30	40	40	

حيث تم وضع الإشارات حسب الترتيب الآتي:

$$x_{13}, x_{23}, x_{25}, x_{35}, x_{32}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{45}$$

واضح أن أقل قيمة لمتغير ذي إشارة سالبة هي $x_{51} = 10$ أي أن $\theta = 10$، وبالتالي بإضافة هذا المقدار إلى الكميات الموجودة في الأماكن ذات الإشارة الموجبة وطرحها من الكميات الموجودة في الأماكن ذات الإشارة السالبة نحصل على حل أساسي مسموح به جديد. بعد هذه الدراسة يمكننا الآن تلخيص خوارزمية النقل كما يلي:

خوارزمية (١٢ , ٢ , ٦) (خوارزمية النقل)

تتلخص هذه الخوارزمية بالخطوات الآتية:

١ - جد حلاً أساسياً مسموحاً به باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي.

٢ - كرر مايلي:

* حدِّد مضاريب السمبلكس ومعاملات التكلفة النسبية.
* اختر متغير بمعامل تكلفة سالب.

* احسب إشارات التغير.
* احسب قيمة التغير θ .
* أجر التغييرات.

حتى تصبح جميع معاملات التكلفة غير سالبة.

مثال (١٣ , ٢ , ٦)

باعتبار المثال (١٠ , ٢ , ٦) حيث سبق أن أوجدنا معاملات النكلفة النسبية، ووجدنا أن المتغير x_{43} هو ذو معامل تكلفة سالب، لذا فهو المتغير الداخل للأساس. نضع إشارة + في مكان المتغير الداخل، وذلك في الجدول الذي يحوي قيم المتغيرات الأساسية وهو الذي أوجدناه بواسطة قاعدة الركن الشمالي الغربي. كما هو موضح في الجدول التالي:

						a_i
	10	20				30
		30	20^-	30^+		80
				10^0		10
			+	40^-	20^0	60
b_j	10	50	20	80	20	

لقد سبق لنا أن حسبنا معاملات التكلفة النسية r_{ij} ووجدنا أن $r_{43} = -1$ وبذا فإن x_{43} هو المتغير الداخل للأساس. وبتحديد إشارات المتغيرات الأخرى في الأساس نجد أن أقل قيمة بإشارة سالبة هي 20 في المكان (2,3) انظر الجدول السابق. وبالتالي فإن $\theta = 20$ بإجراء التعديلات نحصل على الأساس الجديد:

						a_i
	10	20				30
		30		50		80
				10		10
			20	20	20	60
b_j	10	50	20	80	20	

وبحساب مضاريب السمبلكس للأساس الجديد نحصل على:

						u_i
	(3)	(4)	6	8	9	5
	2	(2)	4	(5)	5	3
	2	2	2	(3)	2	1
	3	3	(2)	(4)	(2)	2
v_j	-2	-1	0	2	0	

وبحساب معاملات التكلفة النسبية نجد أن جميع القيم موجبة، كما هو موضح في الجدول التالي:

0	0	1	1	4
1	0	1	0	2
3	2	1	0	1
3	2	0	0	0

r_{ij}

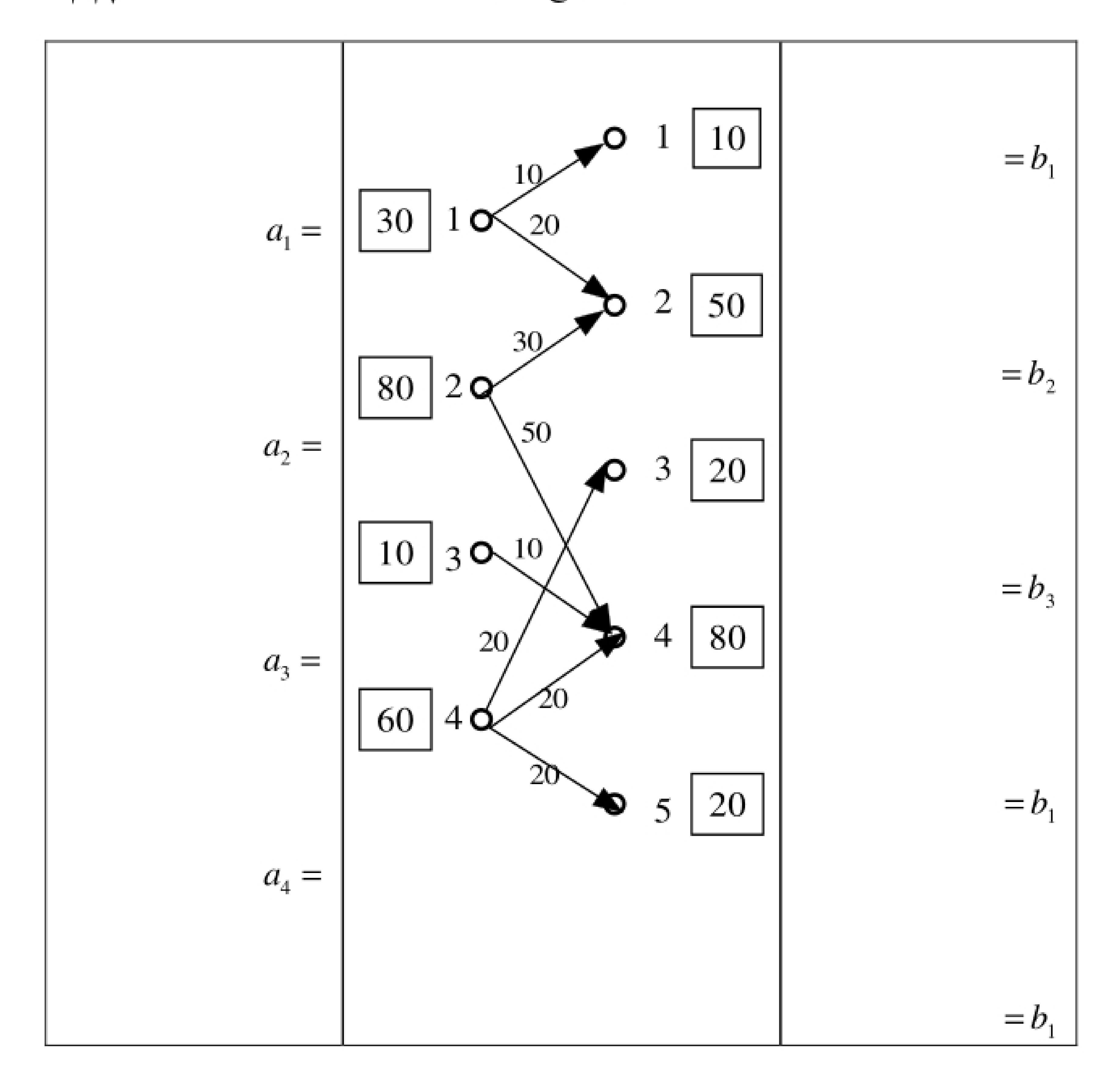
وبذا فإننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل والذي هو:

$$x_{11} = 10, x_{12} = 20, x_{22} = 30, x_{23} = 50, x_{34} = 10$$
$$x_{43} = 20, x_{44} = 20$$

بالتالي فإن قيمة دالة الهدف هي:

$$z = 10 \times 3 + 20 \times 4 + 30 \times 2 + 50 \times 5 + 10 \times 3 + 20 \times 2 + 20 \times 4 + 20 \times 2 = 610$$

وحدة. والممثل بالرسم البياني التالي:



الرسم البياني مطابق للتوزيع المذكور في الصفحة السابقة.

(٦,٣) مسألة التعيين **The Assignment Problem**

ندرس هنا مسألة تحديد أمثل تعيين لـ n من العمال على n من الوظائف، علما بأنه إذا أعطى العامل i الوظيفة j فإن التكلفة هي c_{ij}. كذلك فإن كل عامل

يجب أن تحدد له وظيفة واحدة فقط، ولكل وظيفة يجب أن يحدد لها عامل واحد فقط.

وبالتالي فإن الحل $x_{ij} = 1$ يعني أن العامل i سيكون من نصيبه الوظيفة j و $x_{ik} = 0$ لكل $k \neq j$، وكذلك $x_{lj} = 0$ لكل $l \neq i$. من ذلك يتضح أن الشرط:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

يعني أن العامل i سيأخذ وظيفة واحدة فقط. وكذلك الشرط:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

يعني أن الوظيفة j ستكون من نصيب عامل واحد فقط. من الواضح أن الهدف هو تحديد أفضل تعيين بحيث تكون التكلفة الإجمالية أقل ما يمكن. بشكل عام يمكن كتابته مشكلة التعيين هذه بالشكل الرياضي التالي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s. t.} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n \\
& x_{ij} = 0,1, \quad i, j = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على الشكل:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

يتضح لنا من هذا الشكل أن مشكلة التوظيف ما هي إلا حالة خاصة من مسألة النقل العامة حيث $m = n$ وحيث $a_i = 1$ و $b_j = 1$ لجميع i وj.

نظرية (٦,٣,١)

إن جميع المتغيرات x_{ij} لأي حل مسموح به لمسألة التعيين ستكون مساوية إما صفر أو واحد.

البرهان

بالنظر ملياً لشروط مسألة التعيين نجد أنه لابد أن يكون أحد المتغيرات فقط مساوياً للواحد في كل صف، وكذلك الحال بالنسبة لكل عمود، وبذا فإنه في حالة الحل المسموح به لابد أن يكون هناك n من المتغيرات x_{ij} كل منها يساوي الواحد أما باقي المتغيرات فهي أصفار.

بما أن أي صف (أو عمود) من صفوف (أعمدة) مصفوفة الأساس سيحوي على الأكثر على عنصر واحد فقط غير صفري، لذا فإنه سيكون هناك على الأكثر n من المتغيرات الأساسية تأخذ القيمة واحد. وحيث إنه بالنسبة لمشكلة النقل العامة فإن أي حل منتظم Non degenerate سيحوي على $2n - 1$ من المتغيرات الأساسية، فإن أي حل لمشكلة التعيين سيحوي $n - 1$ من المتغيرات الأساسية ذات القيمة صفر. أي أن

هذه المسألة تعتبر مسألة سيئة الانتظام Highly degenerate. بالتالي فإن تطبيق خوارزمية النقل عليها لن يكون عملياً، (وذلك لأن سوء الانتظام قد يؤدي إلى دوران). ولابد من اللجوء إلى طرائق أكثر فعالية، وبالفعل فلقد قام رياضيان من هنغاريا بوصف خوارزمية ذات فعالية عالية لحل هذه المسألة، وقد عرفت بالخوارزمية الهنغارية والتي عممت فيما بعد إلى الطريقة المعروفة باسم طريقة الأصلية – المقابلة Primal-Dual method لمسائل البرمجة الخطية بشكلها العام.

قبل البدء بدراسة هذه الخوارزمية فإننا سنبدأ بدراسة بعض الأمور الرئيسة. التي تمهد الطريق لتلك الخوارزمية

(٦,٣,١) ثنائية مسألة التعيين Duality of Assignment Problem

الشكل العام للثنائية هو:

$$\max \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

$$\text{s. t.}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

u_i, v_j غير مقيدة

وباستخدام نظرية الـ Weak Complementary Slackness نحصل على:

$$\left(c_{ij} - u_i - v_j\right) x_{ij} = 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

بالتالي فإذا استطعنا إيجاد مجموعه من الحلول المسموح بها $u's,\ v's\ \&\ x's$ والتي تحقق شروط نظرية الـ Complementary Slackness فإن هذه المجموعة ستكون مجموعة حلول مثلى.

تعريف (٦,٣,٢)

نعرف المصفوفة المختزلة Reduced matrix بـ

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

أي تلك المصفوفة التي نحصل عليها بطرح من كل صف أصغر عنصر في ذلك الصف ثم نطرح من كل عمود من أعمدة المصفوفة الناتجة أقل عنصر في ذلك العمود. يكفي أن ننوه هنا (دون برهان) أن الحل الأمثل لمسألة التوظيف لن يتأثر عند إجراء هذا النوع من الاختزال.

مثال (٦,٣,٣)

باعتبار المصفوفة:

				Row min
3	2	5	4	2
0	1	2	3	0
4	1	−1	3	−1
2	5	3	4	2

المصفوفة الناتجة بعد طرح القيمة الصغرى من كل صف هي:

	1	0	3	2
	0	1	2	3
	5	2	0	4
	0	3	1	2
Column min	0	0	0	2

بالتالي فإن المصفوفة المختزلة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{c}_{ij}$$

نظرية (٦,٣,٤)

إن أكبر عدد من الخلايا الصفرية المستقلة في المصفوفة المختزلة يساوي أقل عدد ممكن من الخطوط التي تغطي جميع أصفار المصفوفة المختزلة. بعد هذه المقدمة الموجزة نقدم الآن شرحاً للخوارزمية الهنغارية.

(٦,٣,٥) الخوارزمية الهنغارية Hungarian Algorithm

تعتبر هذه الطريقة التمهيد لطريقة الأصلية – المقابلة Primal-Dual، حيث نبدأ هذه الخوارزمية بالمرحلة البدائية الآتية:

أولا: من مصفوفة معاملات التكلفة c_{ij} نضع $u_i = \min_j \{c_{ij}\}$ لكل صف i .

ثانيا: ثم نضع $v_j = \min_i (c_{ij} - u_i)$ لكل عمود j ، وبهذا نكون قد ضمنا بأن $c_{ij} = u_i + v_j$ ستكون محققه على الأقل مرة واحدة لكل صف ولكل عمود.

ثالثا: نحصل على المصفوفة المختزلة $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - v_j - u_i$ ثم ننتقل إلى الخطوات الرئيسة التالية:

• ارسم أقل عدد ممكن من الخطوط خلال صفوف وأعمدة المصفوفة المختزلة لتغطي جميع أصفارها. إذا كان عدد الخطوط مساوياً n فإن الحل أمثلي، وإلا انتقل إلى الخطوة الثانية.

• اختر اقل قيمة غير مغطاة. اطرح هذه القيمة من كل عنصر من العناصر غير المغطاة. وأضف هذا العنصر إلى كل عنصر مغطى بخطين (خط من العمود وخط من الصف)، ثم عد إلى الخطوة السابقة.

مثال (٦,٣,٥)

اعتبر مصفوفة التكلفة التالية:

					Row min
2	3	5	1	4	1
−1	1	3	6	2	−1
−2	4	3	5	0	−2
1	3	4	1	4	1
7	1	2	1	2	1

المصفوفة الناتجة بعد طرح القيمة الصغرى من كل صف هي:

	1	2	4	0	3
	0	2	4	7	3
	0	6	5	7	2
	0	2	3	0	3
	6	0	1	0	1
Column min	0	0	1	0	1

بالتالي فإن المصفوفة المختزلة هي:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

أي أن عدد الخطوط هي ثلاثة والتي لا تساوي $n = 5$. الآن أقل قيمة غير مغطاة هي 1. نطرحها من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها إلى جميع العناصر المغطاة بخطين فنحصل على:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

عدد الخطوط هو أربعة، وهذا أيضا لا يساوي خمسة. نكرر: أقل قيمة غير مغطاة هي 1. نطرحها من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها إلى جميع العناصر المغطاة بخطين من هذا نحصل على:

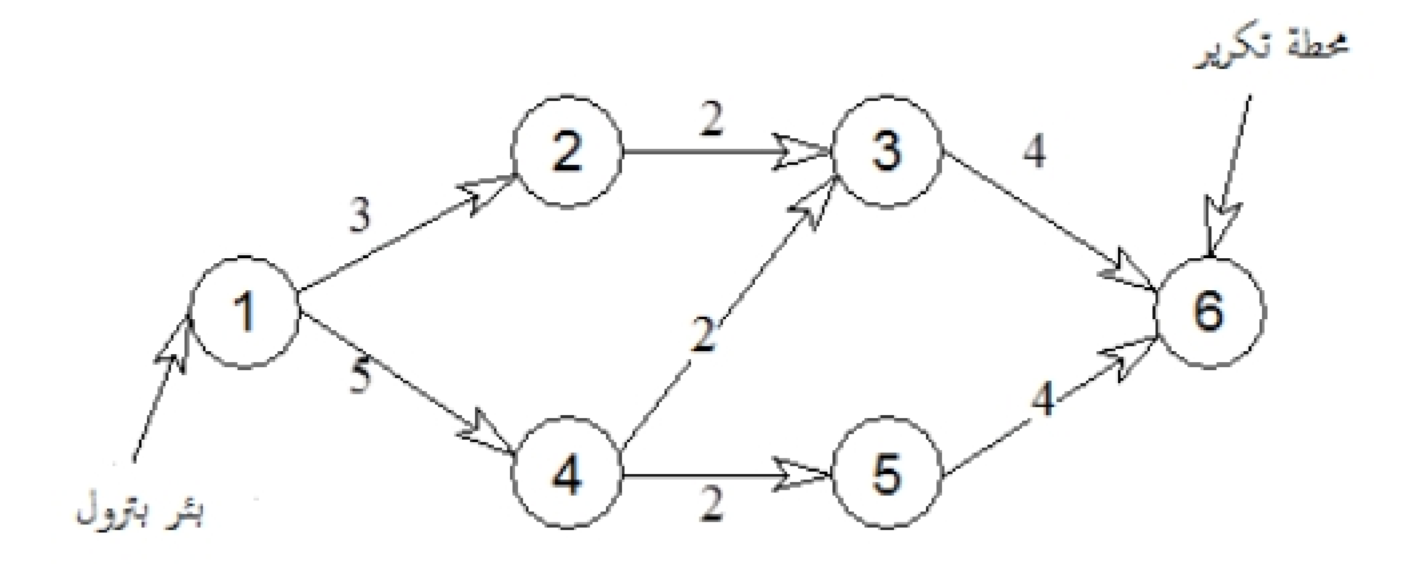
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

عدد الخطوط هو خمسة، لذا فإن الحل الأمثل هو: $x_{12} = x_{21} = x_{35} = x_{44} = x_{53} = 1$
وجميع المتغيرات الأخرى هي أصفار. إن هذا الحل المسموح به الذي تصولنا إليه هو الحل الأمثل، إذ إن التكلفة في المصفوفة المختزلة الأخيرة لايمكن جعلها أقل من الصفر.

(٤ , ٦) تحليل الشبكات Network Analysis

(١ , ٤ , ٦) مقدمة Introduction

يمثل الرأس (1) في الشكل أدناه بئر بترول، بينما يمثل الرأس (6) محطة تكرير. الرؤوس المتبقية تمثل محطات لتقوية ضخ البترول. كذلك تمثل الأضلاع الواصلة بين الرؤوس المختلفة أنابيب يمكن استخدامها لنقل البترول من البئر إلى محطة التكرير، بينما تدل الأعداد المعطاة على الأضلاع على السعة القصوى لكل أنبوب.



الشكل (١ , ٤ , ٦)

السؤال الآن، ما هي أكبر كمية من البترول الخام يمكن نقلها عبر شبكة الأنابيب هذه؟

قبل البدء في دراسة مثل هذا السؤال نقدم فيما يلي بعض التعاريف والمبادئ الأولية.

تعريف (١ , ٤ , ٦)

بافتراض أن $N=(V,E)$ هو راسم موجّه متصل بسيط، حيث V مجموعة رؤوس الراسم Vertices و E مجموعة أضلاعه Edges. فإننا نقول بأن N هي شبكه نقل أو للسهولة نقول بأن N هي شبكه Network إذا تحققت الشروط الآتية:

- يوجد عنصر واحد فقط من عناصر المجموعة V ذو درجة داخلة Indegree مساوية للصفر. نسمي هذا الرأس بالمنبع Source وعادة سيعطى الرقم (1).
- يوجد عنصر واحد فقط من عناصر المجموعة V ذو درجة خارجة Out degree مساوية للصفر. نسمي هذا الرأس المصب Sink، وعادة سيعطى الرقم (n) حيث n عدد عناصر المجموعة V.

• توجد داله من المجموعة E إلى مجموعه الأعداد الحقيقية غير السالبة تحدد لكل ضلع (i, j) عدداً حقيقياً غير سالب c_{ij} يسمى بسعة Capacity ذلك الضلع.

مثال (٢ , ٤ , ٦)

الشكل(١ , ٤ , ٦) يمثل شبكة منبعها الرأس (1) ومصبها الرأس (6) ودالتها:

$$C: E \to \Re^+$$

والمعرف بالجدول التالي:

(i, j)	(1,2)	(2,3)	(3,6)	(1,4)	(4,3)	(4,5)	(5,6)
cij	3	2	4	5	2	2	4

تعريف (٣ , ٤ , ٦)

إذا كانت $N = (V, E)$ شبكة، وكانت x داله تعين لكل عنصر $(i, j) \in E$ عدداً حقيقياً غير سالب x_{ij} ، فإن هذه الدالة تسمى تدفقاً **Flow** إذا حققت الشروط الآتية:

❋لكل $(i, j) \in E$ فإن:

$$x_{ij} \leq c_{ij}$$

❋لكل رأس غير المنبع والمصب فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} \qquad j = 2,3,\ldots,n-1$$

وذلك بعد تعريف:

$$x_{ij} = 0 \qquad \forall (i,j) \notin E$$

ملاحظات

- تسمى x_{ij} بالتدفق عبر الضلع (i, j).
- لأي رأس $j \in V$ فإن $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ يسمى بالتدفق الداخل للرأس j، بينما يسمى $\sum_{i=1}^{n} x_{ji}$ بالتدفق الخارج.

باستخدام هذه المسميات فإن الشرط الثاني في التعريف ٦-٤-٣ أعلاه يعني أن التدفق الداخل لأي رأس يكون مساوياً للتدفق الخارج من ذلك الرأس. إن هذه الخاصة تعرف بقانون حفظ الطاقة.

مثال (٦ , ٤ , ٤)

الدالة x المعرفة بالجدول الآتي تعرف تدفقاً للشبكة الموضحة في الشكل (٦ , ٤ , ١) السابق:

(i, j)	(1,2)	(2,3)	(1,4)	(4,3)	(4,5)	(3,6)	(5,6)
x_{ij}	2	2	3	1	2	3	2

فعلى سبيل المثال التدفق الداخل للرأس 4 يساوي $x_{14} = 3$ ، وهذا يساوي التدفق الخارج من الرأس 4 والذي هو:

$$x_{43} + x_{45} = 1 + 2 = 3$$

الآن التدفق الخارج من المنبع يساوي:

$$x_{12} + x_{14} = 2 + 3 = 5$$

أما التدفق الداخل إلى المصب فهو:

$$x_{36} + x_{56} = 3 + 2 = 5$$

من هنا نلاحظ أن التدفق الخارج من المنبع يساوي التدفق الداخل إلى المصب. إن هذه الملاحظة لا تقتصر على هذا المثال بل هي عامة كما سنبرهن ذلك في النظرية التالية:

نظرية (٥ , ٤ , ٦)

إذا كانت x داله تعرف تدفقاً عبر الشبكة $N = (V, E)$ فإن قيمة التدفق الخارج من المنبع يساوي قيمة التدفق الداخل إلى المصب، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

البرهان

بما أن:

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{j\in V} (\sum_{i\in V} x_{ij})$$

وكذلك:

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{j\in V} (\sum_{i\in V} x_{ji})$$

لذا فإن:

$$\sum_{j\in V} (\sum_{i\in V} x_{ij}) = \sum_{j\in V} (\sum_{i\in V} x_{ji})$$

وحيث إنه لا يوجد تدفق داخل إلى المنبع فإن $\sum_{i\in V} x_{i1} = 0$ ، كذلك $\sum_{i\in V} x_{ni} = 0$ ؛ وذلك لعدم وجود تدفق خارج من المصب كذلك فإن:

$$\sum_{i\in V} x_{ij} - \sum_{i\in V} x_{ji} = 0$$

لكل $j \in V - \{1,n\}$ ، وذلك باستخدام قانون حفظ الطاقة. بتعويض هذه القيم في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

أي أن مجموع قيم التدفق الخارج من المنبع تساوي مجموع قيم التدفق الداخل إلى المصب.

تعريف (٦ , ٤ , ٦)

إذا كانت x دالة تعرف تدفقاً في الشبكة $N = (V, E)$ فإن القيمة:

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

تسمى بقيمة التدفق x.

(٦ , ٤ , ٢) الصيغة الرياضية لمسألة التدفق الأعظم

Mathematical Model for Maximal Flow Problem

إن مسألة التدفق الأعظم يمكن صياغتها بالشكل الرياضي الآتي:

$$\max \qquad z = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0 \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

وهذه مسألة من مسائل البرمجة الخطية والتي يمكن حلها باستخدام إحدى الطرائق العامة المعروفة كطريقة السمبلكس مثلا. إلا أنه نظراً للتكوين الخاص لهذه المسألة، ونظراً لأهميتها العملية فهناك طرائق خاصة بها ذات كفاية أعلى من كفاية الخوارزميات العامة. لهذا فإننا سندرس خوارزمية خاصة بهذه المسألة تأخذ في الاعتبار الشكل الخاص بها.

(٦,٤,٣) خوارزمية حساب التدفق الأعظمي Maximal flow algorithm

الخوارزمية التي سنتعرض لشرحها هنا ذات طبيعة تكرارية بمعنى أننا نبدأ بتدفق ما (عادة نبدأ بالتدفق الصفري ، أي نضع $x_{ij} = 0 \quad i, j = 1, \ldots, n$) ثم نحاول زيادة التدفق إلى أن نصل إلى مرحلة لا نستطيع بعدها زيادة قيمة التدفق الأعظمي.

إن المرحلة الرئيسة في هذه الخوارزمية هي مرحله زيادة قيمة التدفق والتي تتطلب إيجاد مسار من المنبع إلى المصب. إن المسار ومفهومه يلعب دوراً رئيساً هنا، لذا فإننا نقدم فيما يلي بعض المفاهيم والمصطلحات المهمة.

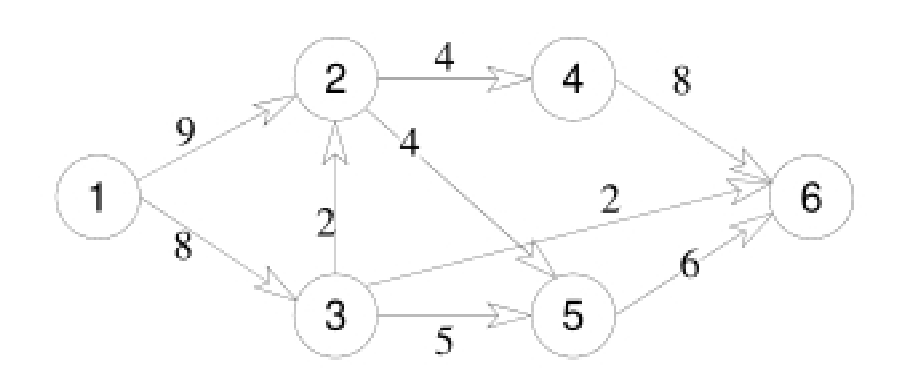
(٦,٤,٤) عدم وحدانية التدفق الأعظم Maximal Flow Uniqueness

نظرية (٦,٤,٧)

التدفق الأعظمي ليس وحيداً.

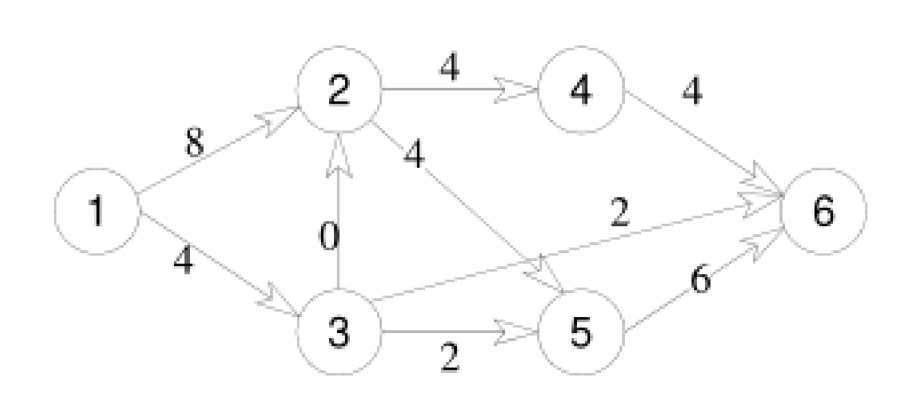
مثال (٦,٤,٨)

باعتبار الشبكة الموضحة بالشكل (٦,٤,٢):



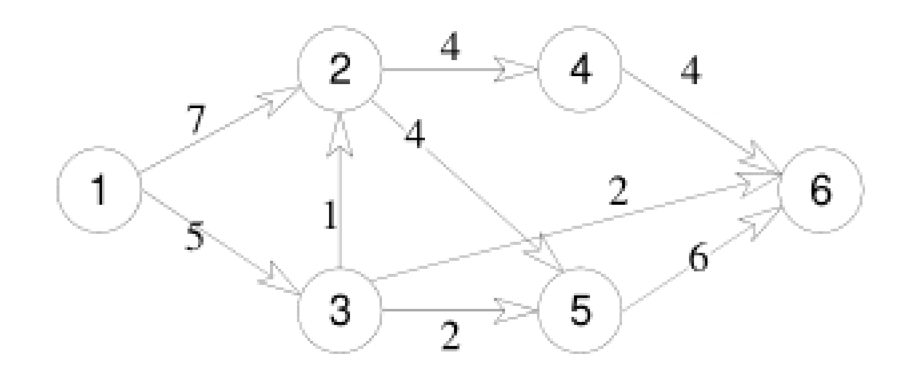
الشكل (٦,٤,٢)

حيث الأعداد الموضوعة على الأضلاع تدل على سعة كل ضلع. لهذه الشبكة سنوضح فيما بعد أن قيمة التدفق الأعظمي هي 12 والتي يمكن الحصول عليها بالتدفق x_{ij} الموضح بالشكل (٦,٤,٣):



الشكل (٦,٤,٣)

أو بالتدفق y_{ij} الموضح بالشكل (٦,٤,٤):



الشكل (٦,٤,٤)

المثال أعلاه يوضح النظرية السابقة.

(٦,٤,٥) المسارات وأنواعها في الشبكات Paths in Networks

باعتبار الشبكة $N=(V,E)$ ، عند حذف الاتجاهات الموجودة على أضلاع الشبكة نحصل على راسم غير موجه. المسارات التي سنتعرض لدراستها هنا هي مسارات على الراسم غير الموجه المرتبط بالشبكة $N=(V,E)$ بافتراض أن

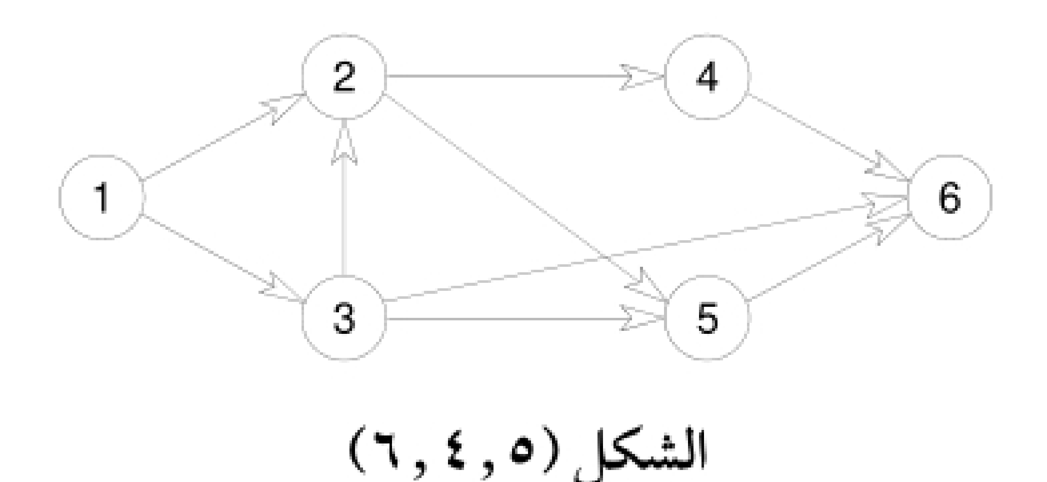
$P=(1,2,\dots,n)$ عبارة عن مسار من المنبع إلى المصب، فإننا نميز بين النوعين الآتيين من أضلاع ذلك المسار.

تعريف (٦ , ٤ , ٩)

إذا كان (i,j) هو أحد أضلاع المسار P وكان اتجاه هذا الضلع من i إلى j فإننا نقول بأن الضلع (i,j) هو ضلع أمامي Forward ، أما إذا كان اتجاه هذا الضلع من j إلى i فإننا نسميه ضلع عكسي Reverse or Backward.

مثال (٦ , ٤ , ١٠)

في الشكل (٦ , ٤ , ٥):



الشكل (٦ , ٤ , ٥)

المسار $P=1(1,2)2(2,4)4(4,6)6$ جميع أضلاعه أمامية بينما في المسار $P=1(1,2)2(2,3)3(3,5)5(5,6)6$ فإن الضلع $(2,3)$ عكسي وباقي أضلاعه أمامية.

نظرية (٦ , ٤ , ١١)

إذا كان P مساراً من منبع إلى مصب الشبكة $N=(V,E)$ وكانت الشروط الآتية محققة:

※لكل ضلع أمامي في المسار P

$$c_{ij} > x_{ij}$$

※لكل ضلع عكسي في المسار P

$$x_{ij} > 0$$

وبوضع:

$\omega = \min\begin{cases} \min\lvert c_{ij} - x_{ij}\rvert & \text{if } (i, j) \\ \min\lvert x_{ij}\rvert & \text{if } (i, j) \end{cases}$	ضلع أمامي ضلع خلفي

(6.3)

وبتعريف:

$$x^*_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & (i, j) \notin \Sigma \\ x_{ij} + \omega & (i, j) \in \Phi \\ x_{ij} - \omega & (i, j) \in \Pi \end{cases}$$

حيث:

$\Sigma =$ { أضلاع المسار P }

$\Phi =$ {أضلاع المسار P الأمامية}

و

{أضلاع المسار P العكسية $= \Pi$ }

فإن x^* يعرف تدفقا ذا قيمه تزيد عن قيمة التدفق x بالمقدار ω .

البرهان

حتى نبرهن أن إضافة ω لكل ضلع أمامي وطرحها من كل ضلع عكسي سيعطي تدفقاً x^* فإن علينا أن نبرهن أن x^* تحافظ على قانون حفظ الطاقة، بمعنى أنه لأي رأس $j \neq 1,n$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^* - \sum_{k=1}^{n} x_{jk}^* = 0$$

نناقش الآن الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى: إذا لم يكن الرأس j واحداً من رؤوس المسار P فمن الواضح في هذه الحالة أن قانون حفظ الطاقة سيكون محققاً؛ وذلك لأن التدفق الجديد x_{ij}^* يكون مساوياً بالتعريف للتدفق السابق x_{ij} والذي بطبيعة الحال سيكون محققاً لقانون حفظ الطاقة.

الحالة الثانية: إذا كان الرأس j أحد رؤوس المسار P . في هذه الحالة فإن x_{ij}^* ستأخذ أما القيمة $x_{ij} + \omega$ أو القيمة $x_{ij} - \omega$. وبما أن x_{ij} هو أساساً تدفق فكل مانحتاجه هو أن نوضح بأن الـ $\omega's$ ستلغي بعضها ببعض. الآن لأي رأس j في المسار P فإن التغير في التدفق سيحدث فقط في الضلعين $(i, j), (j, k)$ الملامسين لذلك الرأس. لذا فإن علينا أن نوضح أن الـ $\omega's$ ستلغي بعضها ببعض في هذين الضلعين فقط. فيما يلي نوضح ذلك بمناقشة الأوضاع المختلفة لهذين الضلعين:

• كلاهما أمامي أو كلاهما عكسي: في هذه الحالة فإن واحدة من الـ $\omega's$ ستقع في المجموع الأيسر في المعادلة السابقة والأخرى ستقع في المجموع الأيمن وبالتالي فإنهما سيلغيان بعضهما بعضاً.

• أحدهما أمامي والآخر عكسي: في هذه الحالة فإن الـ $\omega's$ الأولى والثانية ستقعان في نفس المجموع ولكن بإشارتين مختلفتين، وبالتالي فإنهما سيلغيان بعضهما بعضاً كذلك.

من المناقشة السابقة يتضح لنا أن x_{ij}^* سيكون محققاً لقانون حفظ الطاقة، وبالتالي فإن x_{ij}^* تمثل تدفقاً جديداً. بقي علينا أن نبرهن أن قيمة التدفق x_{ij}^* تزيد عن قيمة التدفق x_{ij} بالمقدار ω. من أجل هذا سنفرض أن قيمة التدفق x هي v. الآن من تعريف قيمة التدفق فإن:

$$z^* = \sum_k x_{1k}^*$$

بما أن واحد من الرؤوس سيقع ضمن المسار P ، ليكن الرأس r مثلا، لذا فإن:

$$\begin{aligned} z^* &= \sum_{\substack{k \\ k \neq r}} x_{1k}^* + x_{1r}^* \\ &= \sum_{\substack{k \\ k \neq r}} x_{1k} + \left(x_{1r} + \omega\right) \\ &= \sum_k x_{1k} + \omega \\ &= v + \omega \end{aligned}$$

وهذا ينهي برهان النظرية.

(٦ , ٤ , ٦) خوارزمية العنونة The Labeling Algorithm

يمكننا الآن الاعتماد على النظرية السابقة في بناء خوارزمية ذات كفاية عالية لإيجاد التدفق الأعظمي في الشبكات. كل ما نحتاجه هو أن نبدأ بتدفق ما وليكن التدفق الصفري مثلاً، ثم نحاول إيجاد مسار لتحسين ذلك التدفق، إن كان ذلك ممكناً. سنبرهن فيما بعد أنه في حالة عدم وجود مثل هذه المسارات والتي تحقق شروط النظرية السابقة فإن التدفق سيكون أمثلياً وبهذا نتوقف.

تتلخص هذه الخوارزمية بما يلي:

١- نبدأ بالتدفق الصفري ونعنون كل ضلع بالزوج المرتب (c_{ij}, x_{ij}) ثم نجري الخطوات الآتية:

٢- عنون الرأس 1 أي المنبع بالعنوان "منبع" واجعل 1 أول عنصر في القائمة L.

٣- بافتراض أن i هو أول عنصر في L ولكل رأس j غير معنون بحيث إن $(i, j) \in E$:

- إذا كان (i, j) ضلعاً أمامياً وكانت $c_{ij} > x_{ij}$ فعنون الرأس j بالزوج المرتب (i, j) ثم ضع j في آخر القائمة L.
- إذا كان (i, j) ضلعاً عكسياً أي $(j,i) \in E$ وكانت $x_{ij} > 0$ فعنون الرأس j بالزوج المرتب (j,i) ثم ضع j في آخر القائمة L.

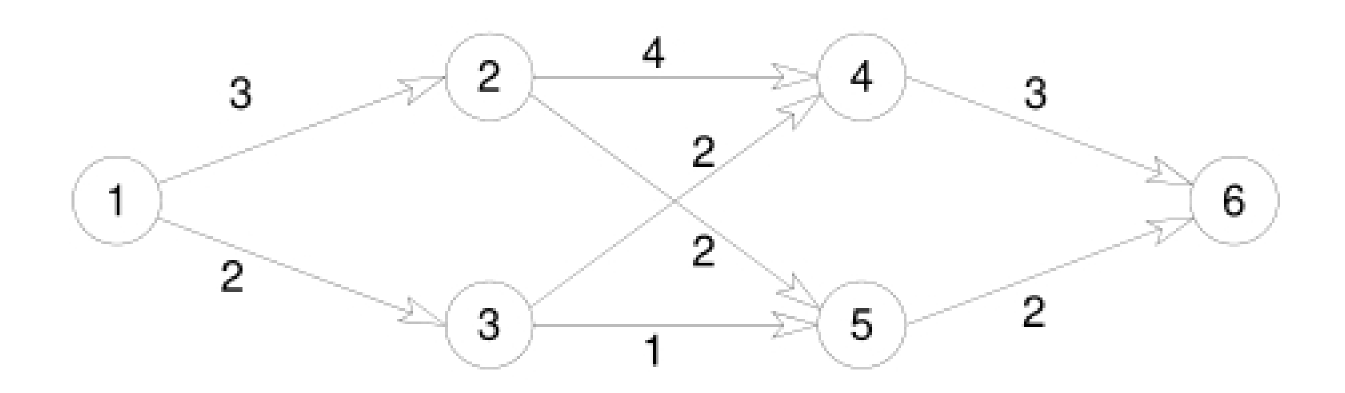
٤- احذف i من القائمة L.

٥- كرِّر الخطوتين ٣،٤ أعلاه حتى تصبح القائمة L فارغة.

٦ - احسب التدفق الجديد باستخدام (6.3).

مثال(١٢ , ٤ , ٦)

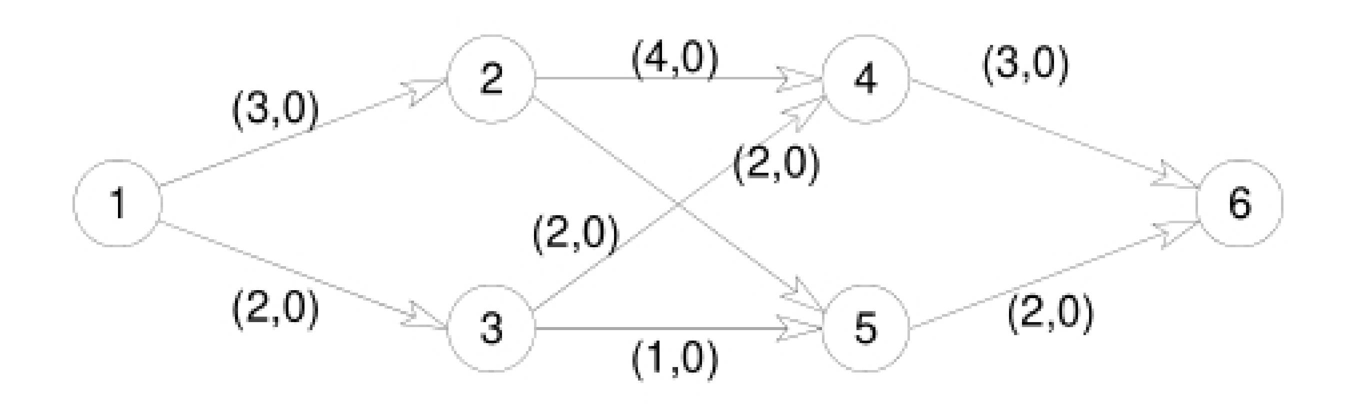
احسب قيمة التدفق الأعظم في الشكل (٦ , ٤ , ٦):



الشكل (٦ , ٤ , ٦)

الدورة الأولى

١- في البداية نبدأ بالتدفق الصفري ونعنون كل ضلع من أضلاع الشبكة بالزوج المرتب (c_{ij}, x_{ij})، كما هو مبين في الشكل (٧ , ٤ , ٦):



الشكل (٧ , ٤ , ٦)

٢- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P{:}1(1,2)2(2,4)4(4,6)6$$

٣- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن:

$$\omega = \min\,(3,4,3) = 3$$

ثم نحسب x_{ij}^{*} فنجد

$$x_{ij}^{*} = \begin{cases} x_{12} = x_{24} = x_{46} = 3 \\ x_{ij} = 0 \quad \text{others} \quad i, j \end{cases}$$

الدورة الثانية:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P{:}1(1,3)3(3,5)5(5,6)6$$

- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن:

$$\omega = \min\,(2,1,2) = 1$$

ثم نحسب x_{ij}^{*} فنجد:

$$x_{ij}^{*} = \begin{cases} x_{12} = x_{24} = x_{46} = 3 \\ x_{13} = x_{35} = x_{56} = 1 \\ x_{ij} = 0 \quad \text{others} \quad i, j \end{cases}$$

الدورة الثالثة

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

• نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P{:}1(1,3)3(3,4)4(4,2)2(2,5)5(5,6)6$$

• نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن:

$$\omega = \min(1,2,3,2,1) = 1$$

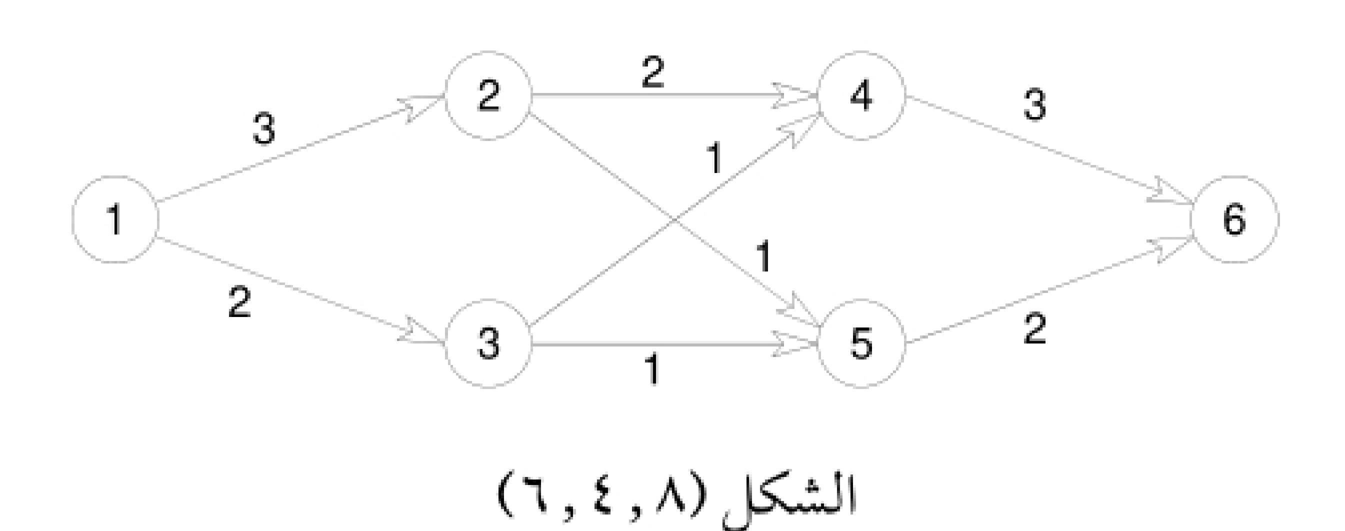
ثم نحسب x_{ij}^* فنجد:

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{46} = 3 \\ x_{56} = x_{24} = x_{13} = 2 \\ x_{25} = x_{35} = x_{34} = 1 \end{cases}$$

الدورة الرابعة

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

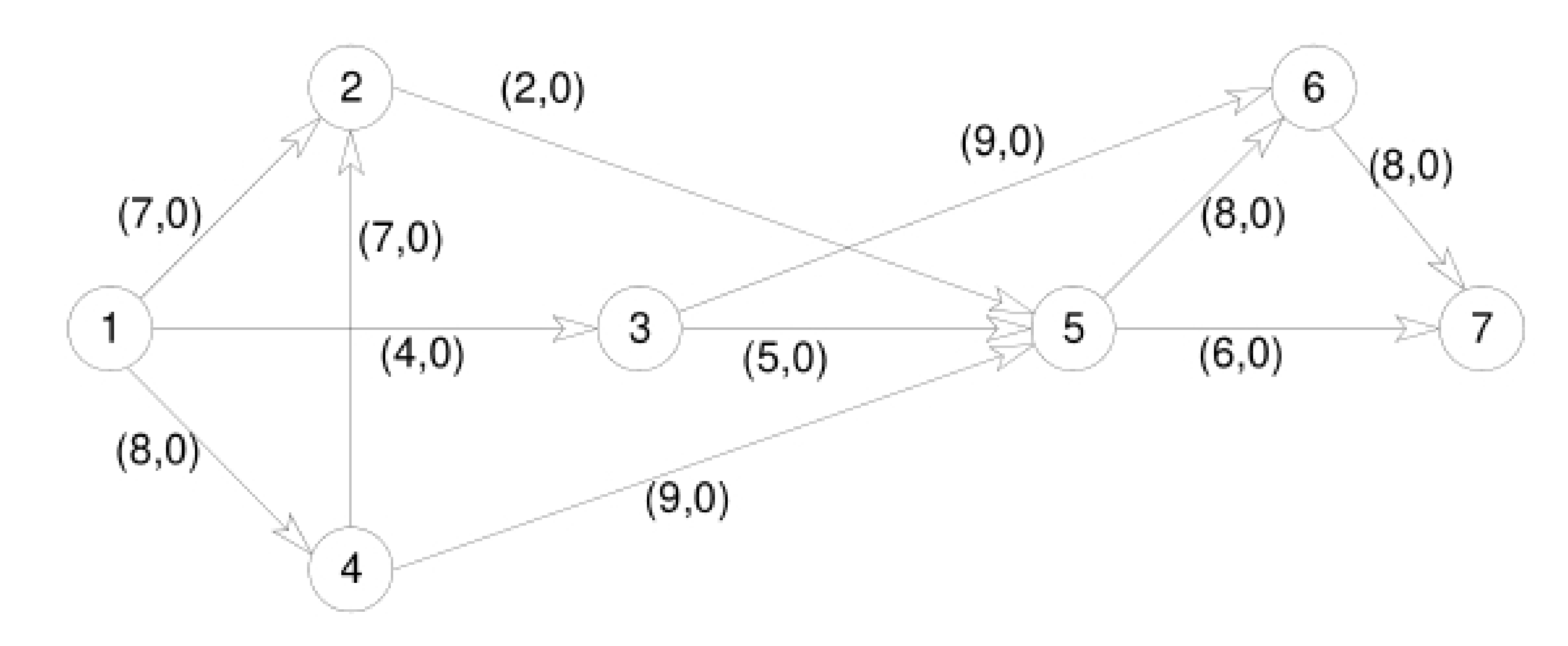
نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنعنون الرأس 1 ثم لا نستطيع عنونة أي رأس أخر وبالتالي نكون قد حصلنا على التدفق الأعظمي ذي القيمة 5 الموضح في الشكل(٨ , ٤ , ٦):



الشكل (٨ , ٤ , ٦)

مثال (١٣ , ٤ , ٦)

احسب قيمة التدفق الأعظم في الشبكة الآتية:



الشكل (٩ , ٤ , ٦)

الدورة الأولى

١- في البداية نبدأ بالتدفق الصفري ونعنون لكل ضلع بالزوج المرتب (c_{ij}, x_{ij}) كما هو مبين في الشكل السابق.

٢- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P{:}1(1,2)2(2,5)5(5,7)7$$

٣- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن:

$$\omega = \min\ (6,2,7) = 2$$

ثم نحسب x_{ij}^{*} فنجد:

$$x_{ij}^{*}=\begin{cases}x_{12}=x_{25}=x_{57}=2\\ x_{ij}=0 \quad \text{others} \quad i,j\end{cases}$$

الدورة الثانية

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P{:}1(1,3)3(3,5)5(5,7)7$$

- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن:

$$\omega=\min\,(4,5,4)=4$$

ثم نحسب x_{ij}^{*} فنجد:

$$x_{ij}^{*}=\begin{cases}x_{12}=x_{25}=2\\ x_{13}=x_{35}=4\\ x_{57}=6\\ x_{ij}=0 \quad \text{others} \quad i,j\end{cases}$$

الدورة الثالثة

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,4)4(4,5)5(5,6)6((6,7)7$$

• نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن:

$$\omega = \min(8,8,9,8) = 8$$

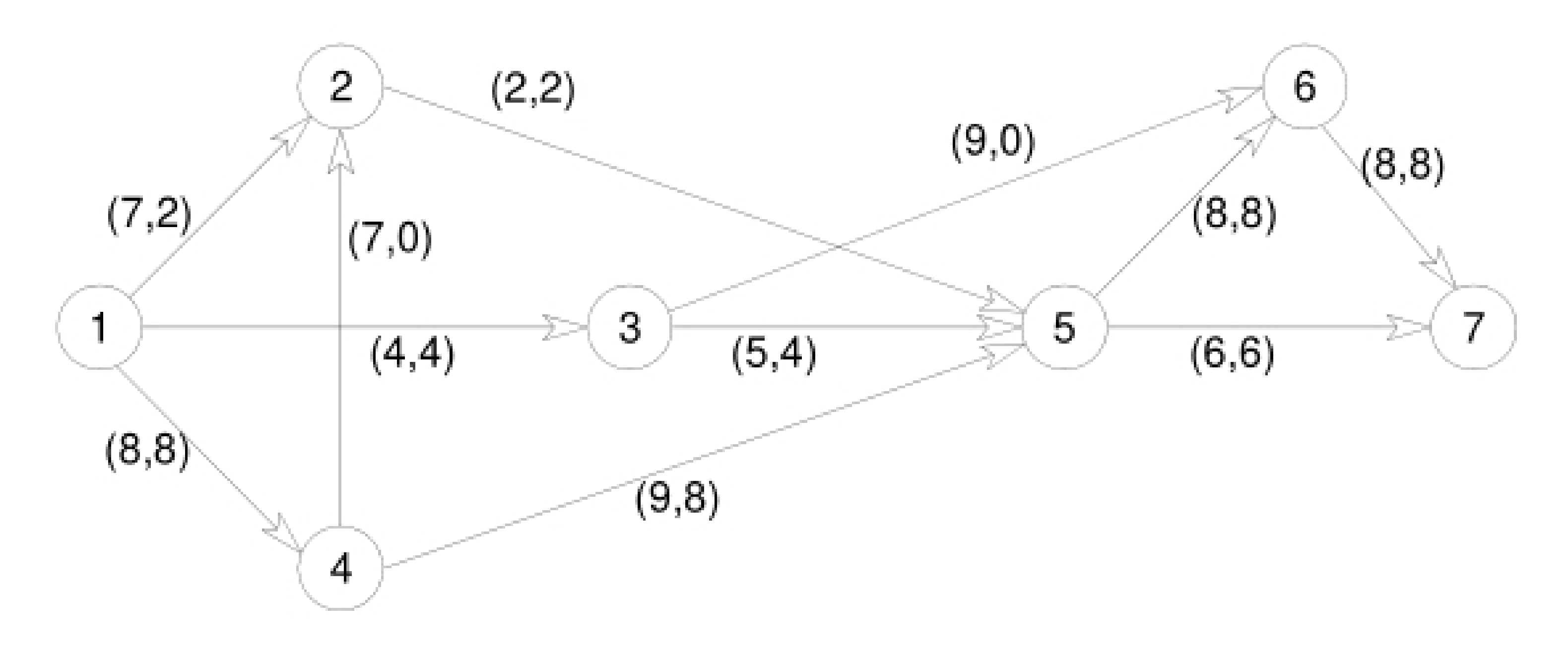
ثم نحسب x_{ij}^{*} فنجد:

$$x_{ij}^{*} = \begin{cases} x_{12} = x_{25} = 2 \\ x_{13} = x_{35} = 4 \\ x_{57} = 6 \\ x_{67} = x_{56} = x_{45} = x_{14} = 8 \\ x_{ij} = 0 \quad \text{others} \quad i, j \end{cases}$$

الدورة الرابعة

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنعنون الرأس 1 ثم نعنون الرأس 2 خلال الضلع (1,2) ثم لا نستطيع عنونة أي رأس أخرى، وبالتالي نكون قد حصلنا على التدفق الأعظم ذي القيمة 14 الموضح في الشكل (١٠ , ٤ , ٦):



الشكل (٦,٤,١٠)

(٦,٤,٧) نظرية التدفق الأعظمي- القاطع الأصغر

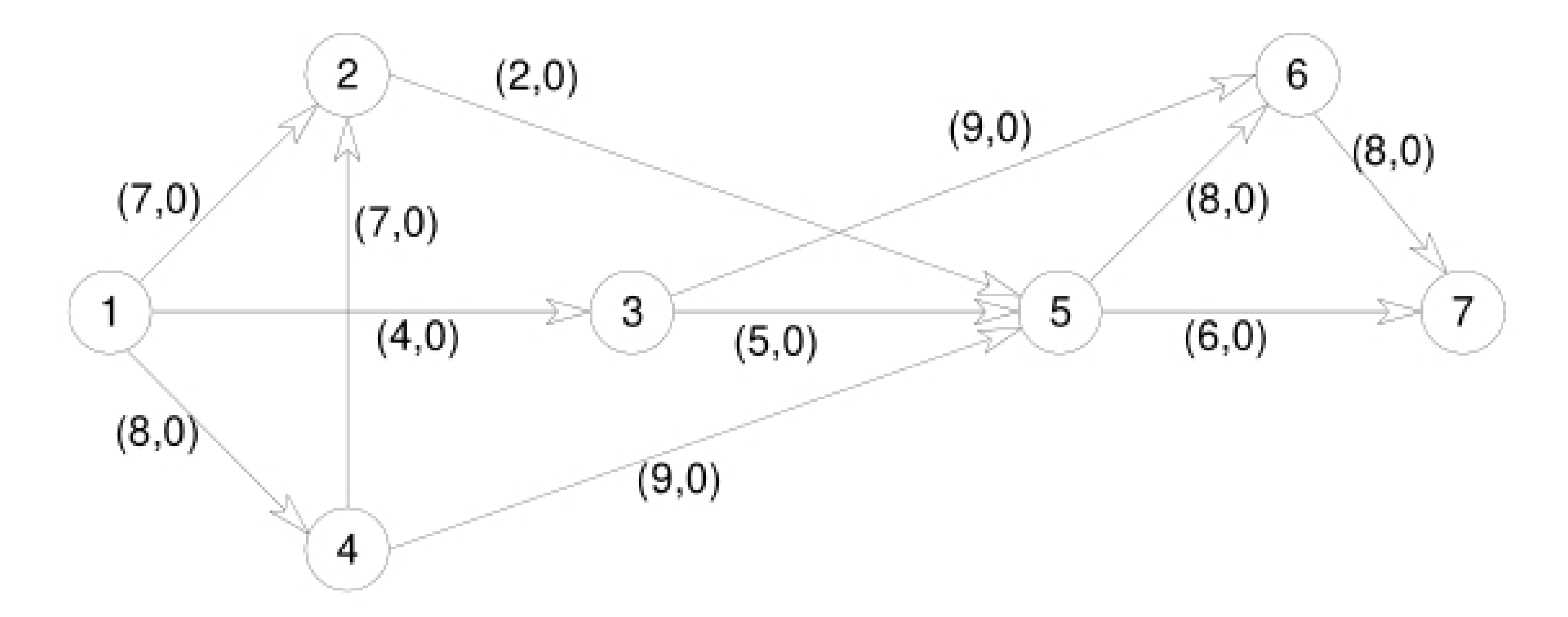
The Max-Flow, Min-Cut Theorem

نقدم فيما يلي بعض الأمور الرئيسة المتعلقة بمفهوم القاطع وعلاقته بمسألة التدفق الأعظم.

تعريف (٦,٤,١٤)

باعتبار الشبكة $N = (V, E)$ ، يعرف القاطع بأنه أي تجزئه لمجموع الرؤوس V إلى مجموعتين منفصلتين بحيث يقع المنبع في أحدها وتسمى مجموعة المنبع وبحيث يقع المصب في الأخرى وتسمى مجموعة المصب.

أي أن القاطع $\{S,T\}$ في الشبكة N يتكون من مجموعة الرؤوس S ومكملتها T بحيث أن الرأس $1 \in S$ والرأس $n \in T$. فعلى سبيل المثال في الشبكة الشكل (٦,٤,١١):



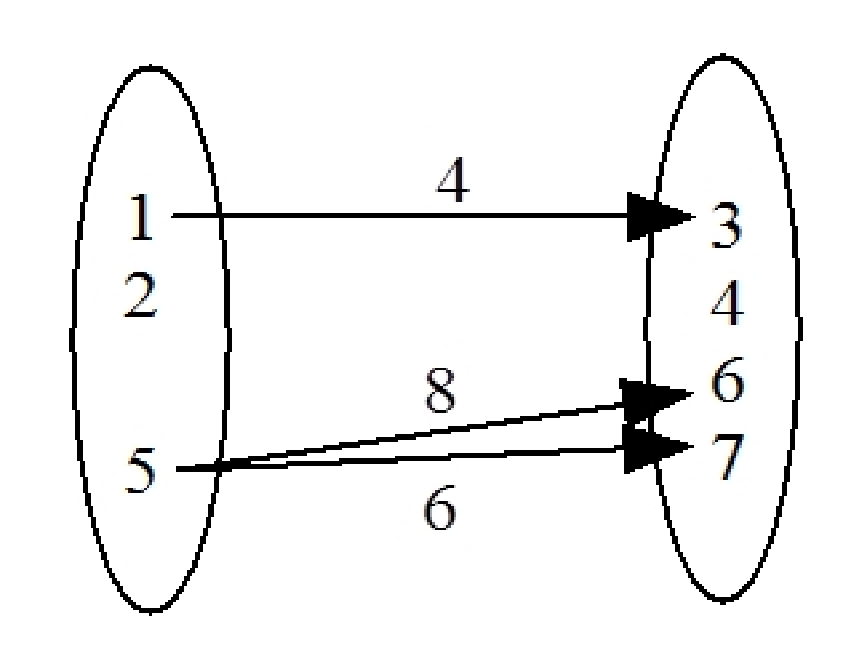
الشكل (١١ , ٤ , ٦)

التجزئة $S = \{1,2,5\}$ و $T = \{4,3,6,7\}$، وتعرف القاطع $C = \{S,T\}$.

تعريف (١٥ , ٤ , ٦)

تعرف سعة القاطع $C = \{S,T\}$ ، والتي يرمز لها بالرمز C_{ST}، بأنها سعة الأضلاع الواصلة من الرأس في مجموعة المنبع S إلى رأس في مجموعة المصب T.

فعلى سبيل المثال سعة القاطع المعرف أعلاه للشبكة السابقة هي:



$$C_{ST} = C_{13} + C_{56} + C_{57} = 4 + 8 + 6 = 18$$

نظرية (١٦ , ٤ , ٦)

باعتبار القاطع $C = \{S,T\}$ ، إذا كانت z هي قيمة تدفق ما x في شبكة ما، فإن:

$$z = \sum_{\substack{i\in S \\ j\in T}} x_{ij} - \sum_{\substack{i\in S \\ j\in T}} x_{ji}$$

أي أن قيمة أي تدفق تساوي قيمة التدفق عبر الأضلاع الواصلة من رأس في مجموعة المنبع إلى رأس في مجموعة المصب مطروحا منها التدفق عبر الأضلاع الواصلة بالاتجاه المعاكس.

البرهان

نكون شبكه جديده كما يلي، نستبدل جميع عناصر المجموعة T بالرأس $n+1$ ، ثم نصل عناصر المجموعة S بهذا الرأس الجديد، وذلك باستبدال كل ضلع من الشكل (i,j) حيث $i\in S, j\in T$ بضلع من الشكل $(i,n+1)$ وكل ضلع من الشكل (j,i) حيث $j\in T, i\in S$ بضلع من الشكل $(n+1,j)$. فنكون بذلك قد حصلنا على شبكة جديدة منبعها 1 ومصبها $n+1$ بما أن قيمة التدفق الخارج من المنبع لم يتغير ويساوي z ، وحيث إن التدفق الخارج من المنبع يساوي التدفق الداخل إلى المصب، لذا فإن $\sum x_{i,n+1} = z$. ولكن التدفق الداخل إلى المصب $n+1$ هو الفرق بين قيم تدفقات الأضلاع الواصلة من S إلى T وقيم تدفقات الأضلاع الواصلة من T إلى S

$$\sum_{\substack{i\in S \\ j\in T}} x_{ij} - \sum_{\substack{i\in S \\ j\in T}} x_{ji}$$

لذا فإن:

$$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = z$$

وهذا ينهي برهان النظرية.

نظرية (١٧ , ٤ , ٦)

باعتبار القاطع $C = \{S, T\}$، إذا كانت z هي قيمة تدفق ما x في شبكة ما، فإن:

$z \leq C_{ST}$

أي أن قيمة أي تدفق هي دوماً أقل من أو تساوي سعة أي قاطع مأخوذ في الشبكة.

البرهان

بما أن $x_{ij} \leq c_{ij}$ لأي ضلع (i, j) حيث $i \in S, j \in T$ بالتالي فإن المجموع الأول في النظرية السابقة لن يزيد عن C_{ST}، كذلك فإن طرح الكميات الموجبة في المجموع الثاني سيؤدي إلى قيمة أقل من السابقة بالتالي فإن:

$z \leq C_{ST}$

تتحقق المساوة فقط عندما يكون C_{ST} هو القاطع الأصغر أي القاطع ذو السعة الصغرى.

يلعب القاطع الأصغر دوراً مهماً في دراسة التدفق الأعظمي توضحه النظرية التالية:

نظرية(١٨ , ٤ , ٦) القاطع الأصغر – التدفق الأعظمي Min-Max Theorem

سعة القاطع الأصغر تساوي قيمة التدفق الأعظمي.

لن نخوض في موضوع القاطع الأصغر أكثر من ذلك وعلى من يرغب معرفة المزيد يمكنه الرجوع إلى كتاب Bazaraa[3]

تمارين الباب السادس

(٦,١) برهن أن مصفوفة النقل هي مصفوفة مثلثية علوية.

(٦,٢) اعتبر مسألة النقل الآتيه:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 12 \\ 10 & 10 & 12 \\ 8 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

				a
	4	14		18
			24	24
	2		4	6
b	6	14	28	

١ – أثبت أن الحل أمثلياً .

٢ – اكتب مسألة النقل بشكل صريح.

٣–اكتب الثنائية لهذه المسألة على فرض أن جميع المتغيرات في المسألة الأصلية حرة.

٤ - أوجد حلاً أمثلياً للثنائية.

(٦, ٣) باعتبار مسألة النقل حيث:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}10 & 12 & 13 & 8 & 14 & 19\\ 15 & 18 & 12 & 16 & 19 & 20\\ 17 & 16 & 13 & 14 & 10 & 18\\ 19 & 18 & 20 & 21 & 12 & 13\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}18\\ 22\\ 39\\ 14\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}10 & 11 & 13 & 20 & 24 & 15\end{bmatrix}$$

أوجد $\mathbf{r}^{(2)}$.

(٦, ٤)اعتبر مسألة النقل الآتية:

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{a}=(5,\quad 10)\quad \mathbf{b}=(8,\quad 5,\quad 2)$$

١ - اكتب الصيغة الرياضية لهذه المسألة.

٢- اكتب المصفوفة $\mathbf{A}$ بشكل صريح.

٣-أوجد حلاً أمثلياً لهذه المسألة باستخدام خوارزمية النقل.

(٦, ٥) باعتبار مسألة النقل حيث:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}6 & 6 & 3 & 9 & 2\\ 8 & 7 & 5 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 8 & 2 & 7\\ 6 & 0 & 0 & 2 & 9\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}90\\ 70\\ 110\\ 150\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}100 & 40 & 100 & 60 & 120\end{bmatrix}$$

اكتب الصياغة الرياضية لمسألة النقل ثم اكتب الصياغة الرياضية للبرنامج المقابل ثم حله.

(٦,٦) أوجد الحل الأمثل لمسألة النقل التالية:

					a
	2	3	4	9	20
	14	12	5	1	30
	12	15	9	3	40
b	10	10	20	50	

(٦,٧) باعتبار مسألة النقل التالية أوجد الحل الأمثل لها:

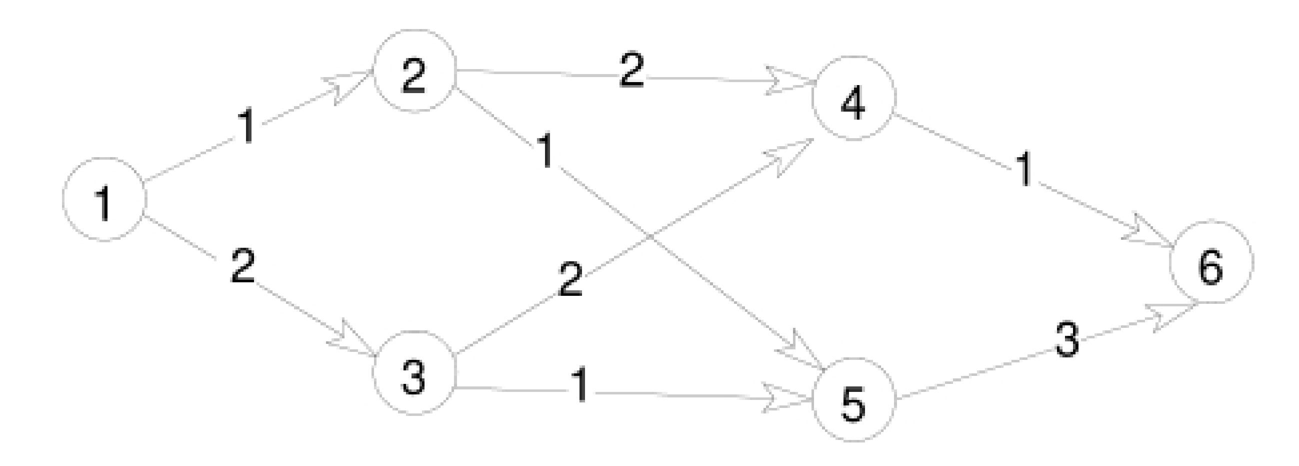
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}4 & 2 & 9 & 7\\ 7 & 8 & 5 & 6\\ 3 & 3 & 4 & 1\\ 7 & 5 & 2 & 6\end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} \ = \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(٦,٨) حل مسألة التوظيف التالية بواسطة طريقة النقل:

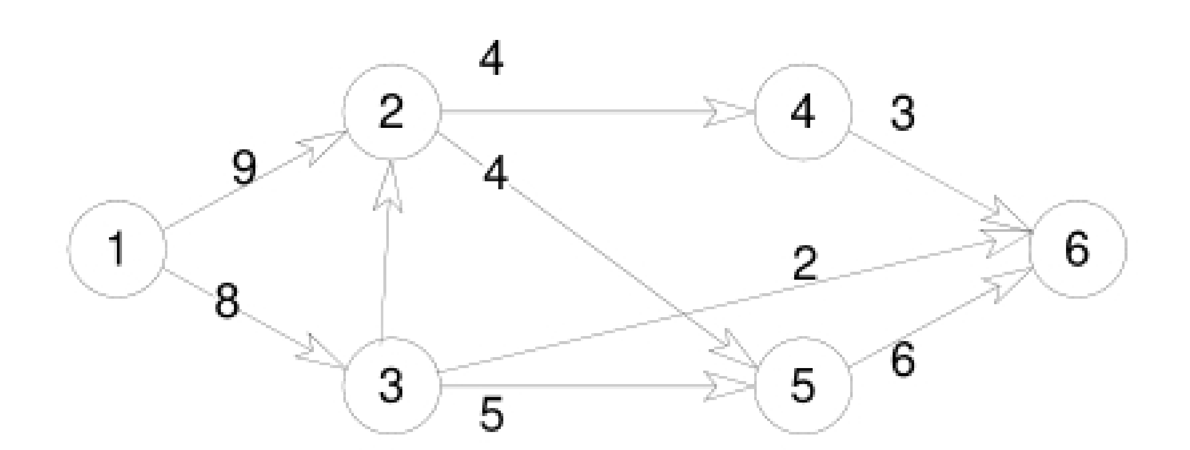
2	1	0	1
1	3	4	1
1	2	6	1
1	1	1	

حل المسألة المذكورة بواسطة طريقة التوظيف.

(٦ ,٩) أوجد التدفق الأعظم من المنبع (1) إلى المصب (6) في الشبكة الآتية:



(٦ ,١٠) أوجد التدفق الأعظم لمسألة الشبكة الآتية:



الملاحق

Appendixes

ملحق (أ): الحاسوب والبرمجة الخطية

Computer and Linear Programming

إنطلاقاً من إيماننا بأن الحاسوب قد يلعب دوراً ايجابياً في ترسيخ المفاهيم الرياضية ضمن شروط هامة منها

- كيفية النظر الى الحاسوب.
- حُسن اختيار لغة البرمجة.

فإذا نظر الى الحاسوب وكأنه مجموعة من الخدم الالكترنيين نقوم بتعليمهم بعض المفاهيم أو الخوارزميات الرياضية. فإننا خلال تعليمهم نعلّم ذاتنا. ويشترط لذلك أن تتوفر لغة برمجة هيكلية وملائمة بحيث تجعل من مهمة تعليمهم مهمة سهلة وممتعة. إن لغة ماتلاب Matlab والتي هي اختصاراً لـ "معمل مصفوفات" تعتبر اللغة الأمثل لمقرر كمقرر البرمجة الخطية. ونرى أنه يمكن استخدامها كداعم قوي لترسيخ بعض مفاهيم هذا المقرر في المجالات الثلاث الرئيسية الآتية:

مجال التعليم من خلال البرمجة

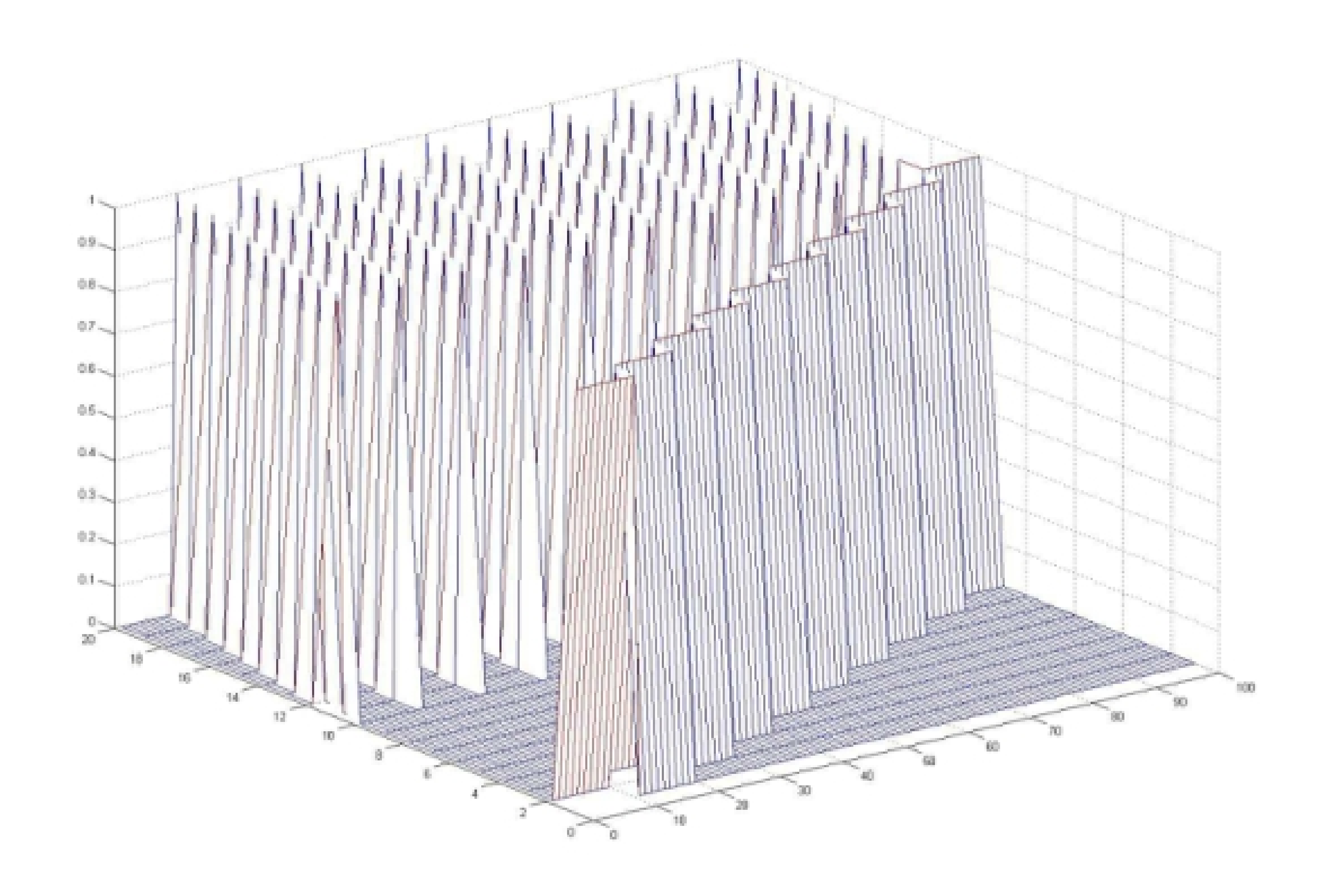
في هذا المجال نرى أن يقوم القارئ ببرمجة كل خوارزمية يدرسها وفي هذا كما اشرنا سابقاً فائدة في تعليم ذاته. وقد زودنا القارئ ببعض الأمثلة لبعض البرامج (انظر ملحق ب).

مجال اجراء تجارب عددية

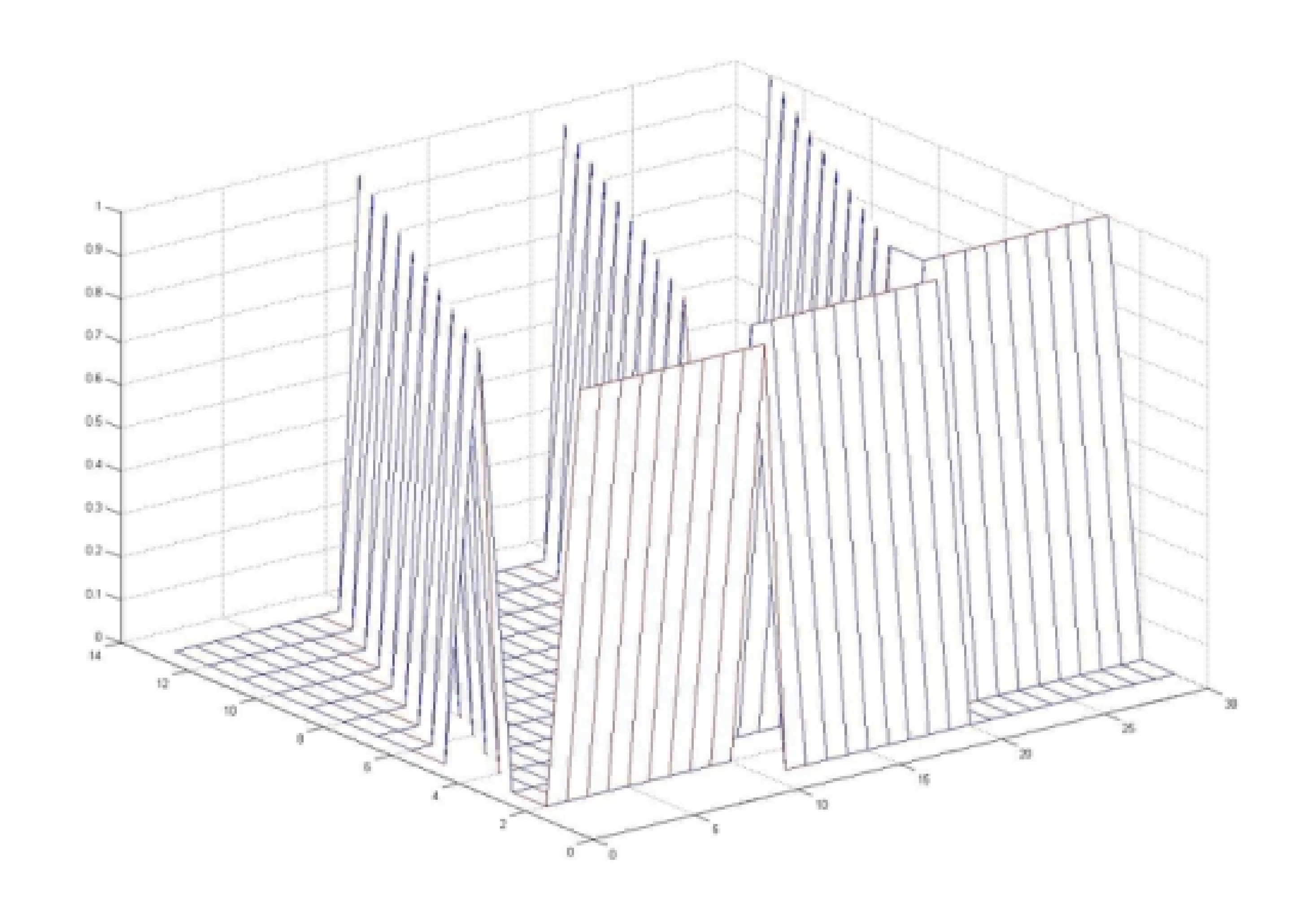
يمكن للقارئ بعد توفر البرامج الخاصة بخوارزميات المقرر أن يقوم باجراء تجارب عددية لدراسة فعالية تلك الخوارزميات. مماتتيح الفرصة لمناقشة مسائل عملية ومتعددة.

مجال الرسم

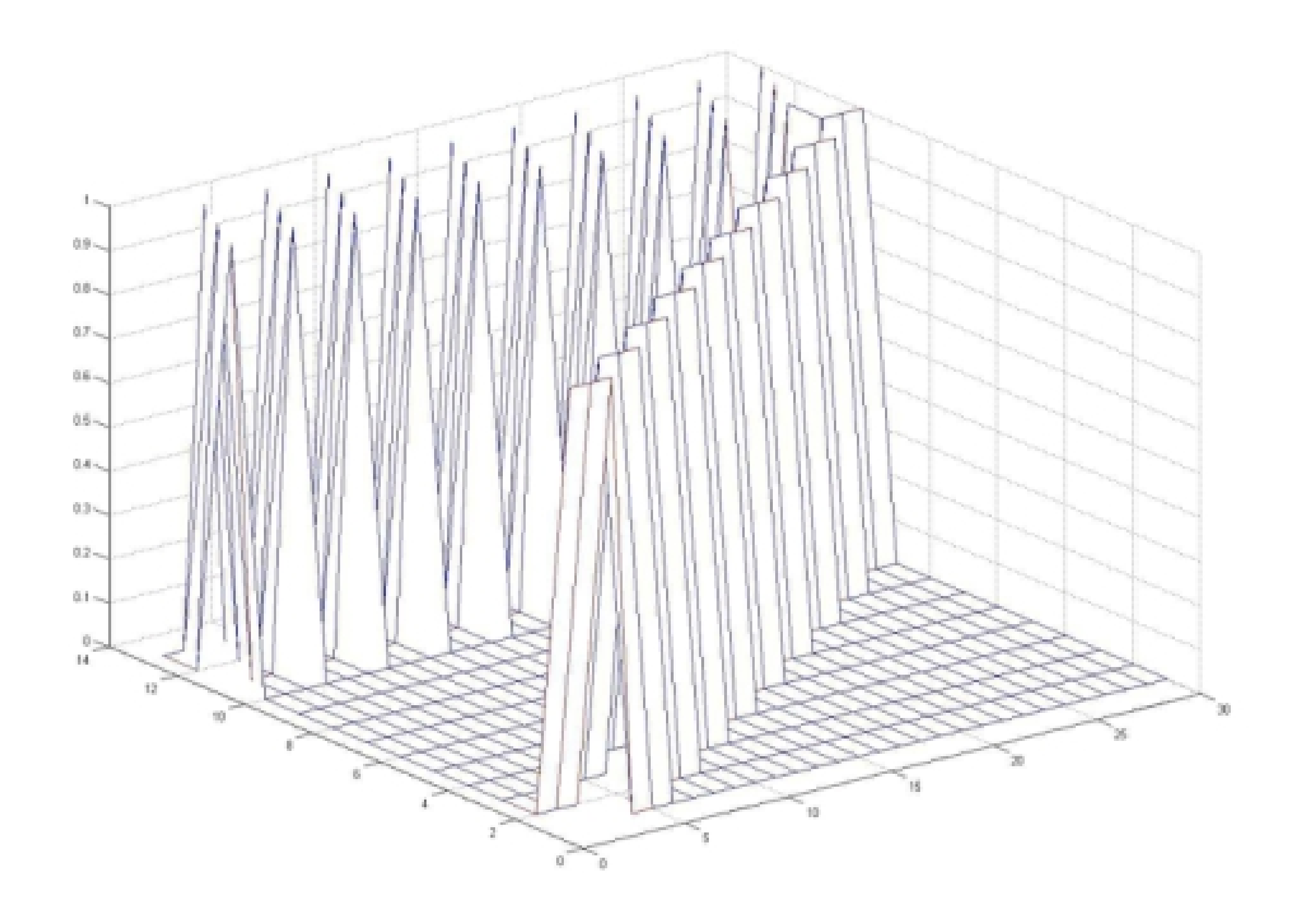
يعتبر ماتلاب قمة في رسم المصفوفات وحيث أن تصميم العديد من خوارزميات هذا المقرر تعتمد على بنية المصفوفة المتعلقة بالمسألة والتي يمكن مشاهدة بنيتها برسم المصفوفة (انظر مثال لرسم مصفوفة النقل) وبنيتها الخاصة التي أوحت بخوارزمية النقل.



الشكل رقم (١).



الشكل رقم (٢).



الشكل رقم (٣).

ملحق (ب): نصوص بعض البرامج

Some Core Programms

نقدم في هذا الملحق نصوصاً كاملة للبرامج الآتية:

أولاً: برنامج bsm

يقوم هذا البرنامج بحل البرنامج الخطي المعطى بطريقة السمبلكس. وفيما يلي نص هذا البرنامج

```
function x=bsm(A,b,c,ch)
% The basic SIMPLEX method. Given A,b,c and ch
% Either the max or the min of cx is obtained in x.
% A is the matrix without the unit matrix
% b is the rhs and c is the cost coefficients.
% ch is either 'min' if the problem is minimization or
%             'max' if maximization.
% ......
%
% ---- November  1992 ------.
%
% ..........
```

```
% BSM uses the follwing subroutines:-
% * pops  "the pivoting operations routine"
% * dpev1  "the routine for determining the pivot element"
% * it uses also the matlab routines PLOT & BAR.
%============================================
if ch=='max',
   c=-1*c;
end
% constructing the augumented matrix.
[m,n]=size(A);
A=[A,eye(m)];
[m,n]=size(A);
%nbv=number of basic variables
%nnv=number of nonbasic variables
nbv=m;
nnv=n-m;
d=zeros(1,nbv+1);
r=[c,d];
A=[A,b;r]
%
% IB index of basic variables
%
% IN index of nonbasic variables
%
for i=1:nnv,
  IN(i)=i;
end
for i=1:nbv,
  IB(i)=n-m+i;
end
% computing the solution x
%
x=[zeros(1,nnv),b'];
%
%mni = maximum no of iterations allowed.
mni=50;
R=A;
for ji=1:mni,
   sw=0;
   ct1=ji;
   [x1,x2]=bar(x);
   plot(x1,x2)
   title(['the bfs at tablue...   ',num2str(ji)])  ,pause
% here is the procedure DPEV1......
%
   [s,t,sw]=dpev1(R);
   if sw==1,
     if ~all(R(rr,IN)),
```

```
      disp('the solution is not unique!.....')
    end
    break
  end
  if sw==2,
    break
  end
  disp('the pivot element is the element ')
  e=[s,t];
  disp(e)
% here is the procedure POPS....
%
  R=pops(R,s,t);
  disp(R)
  disp(' ')
  disp('press any key to continue......')
  pause
  temp=IB(s);
  IB(s)=t;
  disp(' here is the basic elements index ')
  disp(IB)
  IN(find(IN==t))=temp;
  disp(' and here is the non-basics.....')
  disp(IN)
  pause
  x=zeros(1,n);
  cr=nbv+nnv+1;
  rr=nbv+1;
  for ii=1:nbv,
      x(IB(ii))=R(ii,cr);
  end
  z(ji)=-R(rr,cr);
end
z=[0,z];
[zx,zy]=bar(z);
plot(zx,zy)
title('the objective function'), pause
if ct1==mni,
 disp('maximum no. of iteration is reached without')
 disp('obtaining the optimal solution....')
 disp('.................................')
 disp('the program limits the no. of iteration by 50')
 disp('if more is needed modify mni in the procedure BSM and rerun..')
end
```

ويستخدم برنامج bsm البرنامجين الآتيين:

- برنامج DPEV1 الذي يستخدم خوارزمية بلاند لتحديد المتغيرات الداخلة والمتغيرات المغادرة. وفيما يلي نص هذا البرنامج

```
function [s,t,sw]=dpev1(A)
% This procedure uses BLAND'S rule to output the
%pivot position s&t.
%The input matrix must be the whole augumented matrix.i.e
% A represent the standared SIMPLEX tablueu as defined in
%Luenberger-Linear and nonlinear programming-.
%
[m,n]=size(A);
%
% checking for optimality.....
%
if A(m,:)>=-0.00001,
    disp('the current soultion is optimal')
    sw=1;
  else
%
% determining the pivot column......
%
  ii=find(A(m,:)<0 & abs(A(m,:))>10^(-5));
  t=ii(1);
%
% determining the pivot row....
%
  mm=m-1;
  if all(A(1:mm,t)<=0),
    disp('the problem has an unbounded solution! ....')
    sw=2;
  else
     for ww=1:mm,
       if A(ww,t)<=0,
         rr(ww)=-1;
       else
         rr(ww)=A(ww,t).\A(ww,n);
       end
    end
    jj=find(rr>=0);
    [yy,s]=min(rr(jj));
    s=jj(s);
  end
end
```

- برنامج POPS والذي يعطي المصفوفة الناتجة عد اجراء العمليات المحورية على مصفوفة معطاة. وفيما يلي نص هذا البرنامج

```
function A=pops(A,s,t)
%Given a matrix A and a pivot position s&t. The new matrix
%resulting from the pivoting operations is outputed.
%------
%------
%This procedure is used inside the BSM procedure.
%
[m,n]=size(A);
for i=1:m,
  for j=1:n,
    if i==s,
      b(i,j)=A(i,j)/A(s,t);
     else
      b(i,j)=A(i,j)-A(i,t)*A(s,j)/A(s,t);
    end
  if abs(b(i,j))<10^(-6),
     b(i,j)=0;
  end
  end
end
A=b;
```

ثانياً: برنامج FR2D

يقوم هذا البرنامج برسم المنطقة المسموح بها في البعد الثنائي لبرنامج خطي معطى. وفيما يلي نص هذا البرنامج

```
function fr2d(a,b)
% Draws the 2D feasible region of a given LP problem
%
[m,n]=size(a);
if n ~= 2,
  disp('your matrix should have two columns only..')
  return
end
mx=1;
my=1;
for j=1:2,
  for i=1:m,
    if a(i,1)==0,
      x1=0;
```

```
        x2=mx;
        y1=b(i)/a(i,2);
        y2=y1;
       elseif a(i,2)==0,
         x1=b(i)/a(i,1);
         x2=x1;
         y1=0;
         y2=my;
       else
        x1=b(i)/a(i,1);
        y1=0;
        y2=b(i)/a(i,2);
        x2=0;
      if y2<0,
          y2=my;
          x2=(b(i)-a(i,2)*y2)/a(i,1);
      end
       if x1<0,
          x1=mx;
          y1=(b(i)-a(i,1)*x1)/a(i,2);
       end
     end
     x(1,i)=x1;
     y(1,i)=y1;
     x(2,i)=x2;
     y(2,i)=y2;
     xt=max([x1 x2]);
     yt=max([y1 y2]);
        if xt>mx,
           mx=xt;
         end
        if yt>my,
           my=yt;
        end
    end
end
plot(x,y)
title('The Feasible Region')
 pause
```

ثالثاً: برنامج NWC01

يقوم هذا البرنامج بحساب حل أساسي مسموح به لمسألة النقل وذلك اعتمادا على خوارزمية الركن الشمالي الغربي. وفيما يلي نص هذا البرنامج

```
function nwc01(a,b)
% compute a basic feasible solution for the transportation problem
% using the North West Corner Method
%
i=1;j=1;
[rb cb]=size(b);
[ra ca]=size(a);
n=max(rb,cb);
m=max(ra,ca);
c=zeros(m,n);
k=max(n,m);
while i<=m ,
    if a(i)>b(j),
       c(i,j)=b(j);
       a(i)=a(i)-b(j);
       b(j)=0;
       j=j+1;
    elseif a(i)<b(j),
       c(i,j)=a(i);
       b(j)=b(j)-a(i);
       a(i)=0;
       i=i+1;
    else
       c(i,j)=a(i);
       b(j)=b(j)-a(i);
       a(i)=0;
       i=i+1;
    end
end
disp('The solution is .... ')
c
```

رابعاً: برنامج TRANSM

يقوم هذا البرنامج بتكوين مصفوفة النقل ورسمها. وفيما يلي نص هذا البرنامج

```
function transm
% draws the transportation matrix
%
n=10;m=12;
f=zeros(m,n);
for i=1:m,
  for j=1:n,
   f(i,(i-1)*n+j)=1;
end
end
l=eye(n);for i=2:m,l=[l,eye(n)];end
a=[f;l];
mesh(a)
```

ملحق (ج) : استخدام ماتلاب

How to Use Matlab

نرى أنه افضل وسيلة لتعلم اوامر وامكانيات ماتلاب هي بالممارسة المباشرة. ويعطي الامر HELP قائمة بالمواضيع التي يقدم ماتلاب شرحا عن عملاها مبتدأً بالدوال المعرفة ومنتقلاً الى الملفات المتوفرة.

نقدم فيما يلي شرحا مختصراً لبعض امكانات ماتلاب تاركين للقارئ فرصة الاستمتاع بالتعرف بنفسه على باقي الامكانات الهائلة غير المذكورة هنا.

أولاً: مؤثرات مصفوفات ومتجهات

+ X+Y يجمع مصفوفتين من نفس الرتبة.

− X−Y يطرح المصفوف X من المصفوف Y.

* Y*X يحسب حاصل ضرب المصفوفتين.

.* X.*Y يجري عملية الضرب على أساس عنصر في المصفوف X بالعنصر المقابل له في المصفوف Y.

/ X/Y القسمة من اليمين تعني تحسب X*INV(Y) .

./ X./Y يجري عملية القسمة على أساس عنصر في المصفوف X بالعنصر المقابل له في المصفوف Y.

\ Y\X القسمة من اليسار تعني تحسب INV (X) * Y .

^ X^n يجري عملية القوى أي يعطي X^n .

^ X .^ n يجري عملية القوى بشكل عنصر لعنصر.

' X' يعطي منقول مرافق مصفوفة أي $\overline{X}^T$.

ثانياً: مؤثرات منطقية وعلاقية

يستخدم ماتلاب المؤثرات العلاقية ‎=~,==,=<,=>,<,>‎ كما يستخدم المؤثرات المنطقية ~,|,& لتعني AND,OR,NOT على الترتيب.

ثالثاً: رموز وقيم خاصة

! يستخم هذا الرمز للجمل التوضحية.

EPS الدقة النسبية للنقطة العائمة.

INF قيمة ∞+ التي يتعامل معها الحاسوب.

PI قيمة تقربية لـ π .

FLOPS عدّاد يحوي عدد العمليات الحسابية.

رابعاً: الرسم

PLOT	PLOT(X,Y) يرسم المتجه X مع المتجه Y. يمكن اضافة علاقات خاصة والوان عند الرسم عدة متجهات على نفس الورقة (الشاشة).
POLAR	POLAR(T,R) يرسم باستخدام الاحداثيات القطبية مستخدما الزاوية T بالرديان، ونصف القطر R. لرسم السطوح، MESH(Z) يعطي صورة في البعد الثلاثي للمصفوفة

	Z مستخدما قيم Z كارتفاعات فوق المستوى.
BAR	BAR(X) يعطي عناصر X على شكل أعمدة.
TITLE	TITLE('.....') يعنون الرسم بالعنوان المعطى ضمن الحاصرتين.
XLABEL	XLABEL('.....') يعنون محور السينات بالعنوان المعطى ضمن الحاصرتين.
YLABEL	YLABEL('.....') يعنون محور الصادات بالعنوان المعطى ضمن الحاصرتين.
TEXT	TEXT(X,Y,'.....') يكتب ما بين الحاصرتين عند النقطة المحددة بالاحداثيات .
HOLD	يبقي الرسم. لحذف تأثير هذا الأمر يستخدم HOLD OFF .
CLG	يمسح ما على شاشة الرسم.
SUBPLOT	SUBPLOT(m,n,p) يجزئ نافذة الرسم الى نوافذ، ويستخدم النافذة p . SUBPLOT(2,2,3) مثلا يقسم الشاشة الى اربع مناطق للرسم ويستخدم المنطقة الثالثة للرسم.
SHG	يظهر شاشة الرسم

خامسا: معالجة المصفوفات

DIAG(X,K)	متجه عمودي يحوي عناصر القطر K من X.
TRIL(X,K)	المصفوفة المثلثية السفلية والواقعة على وتحت القطر K من X.
TRIU(X,K)	المصفوفة المثلثية العلوية والواقعة على وفوق القطر K من X.
NORM	معرّف في الماتلاب عدة معايير لقياس المصفوفات منها:
NORM(X)	يعطي اكبر قيمة شاذة في X .
NORM(X,1)	يعطي اكبر مجموع عمودي بالقيمة المطلقة.
NORM(X,2)	نفس NORM(X).
NORM(X,inf)	مقياس المالانهاية يعطي اكبر مجموع صفي بالقيمة المطلقة.
NORM(X,'fro')	معيار فروبنيس.
	كذلك للمتجهات فهناك المقاييس التالية:
NORM(V,p)	معيار p=2 للمتجهات.
NORM(V)	نفس NORM(V,2).
NORM(V,inf)	يعطي اكبر عنصر في المتجه بالقيمة المطلقة.
NORM(V,-inf)	يعطي اصغر عنصر في المتجه بالقيمة المطلقة.
COND	COND(X) يعطي العدد الشرطي للمصفوفة.
ZEROS(N,M)	يعطي مصفوفة من الرتبة $n \times m$ جميع عناصرها أصفاراً.
EYE(N)	يعطي مصفوفة الوحدة I_n .
ONES(N)	يعطي مصفوفة $n \times n$ جميع عناصرها 1.
RAND(N,M)	يعطي مصفوفة عشوائية من الرتبة $n \times m$.

سادساً: تحليل المصفوفات

BACKSUB(L,B)	يحل المعادلة LX=B بالتعويض الخلفي.
CHOL(X)	يعطي تحليل تشوسكي.
EIG(X)	يعطي القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة X.
LU(X)	يعطي تحليل LU للمصفوفة X.
NNLS(X)	يحل LX=B بطريقة اقل المربعات غير السالبة.
QR(X)	يعطي تحليل QR للمصفوفة
ORTH(A)	يعطي قاعدة متعامدة لمدى A.
SVD(X)	يعطي تحليل القيمة الشاذة.
SCHUR(X)	يعطي مصفوفة شور T ومصفوفة U بحيث إن X=U*TU'.
DET(X)	يعطي محددة المصفوفة المربعة X.
TRACE(X)	يعطي أثر المصفوفة X.

المراجع

أولاً : المراجع العربية

عبدالرحمن أبوعمة، ومحمد العش ، *البرمجة الخطية*، جامعة الملك سعود ١٩٩٠م.

زيد البلخي، *مقدمة في بحوث العمليات*، جامعة الملك سعود ١٩٩٨م.

ثانياً : المراجع الأجنبية

Luenberger D. G., Linear and Nonlinear Programming, 2nd edition, Addison-Wesley, 1984.

Chvatal V., Linear Programming, W. H. Freeman, 1983.

Bazara M. S., Jarvis J. J., Linear Programming and Network Flows, John Wiley & Son, 1977.

Dantzig G. B., Linear Programming and Extansions, 4th edition, Princeutan, 1968.

Taha H. A., Operation Research, 3th edition, Macmillan, 1983.

Gass S. I., Linear Programming Methods and Applications, 4th edition, McGraw-Hill, 1975.

Karmarker N., A new Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, Cambinatorica 4,373-395, 1984.

Collatz L. and Wetterling W.Optimization Problems, Published by Springer-verlagr1975.

ثبت المصطلحات

أولاً : عربي – إنجليزي

أ

أشكال غير قياسية للبرنامج الخطي	Linear programming non canonical form
أعداد صحيحة	Integers

ب

برامج خطية خاصة	Special linear programming
برمجة خطية	Linear programming
برمجة ديناميكية	Dynamic programming
برمجة رياضية	Mathematical programming
برمجة صحيحة	Integer programming
برمجة غير خطية	Nonlinear programming

برمجه رياضية أو أمثلية	Optimization

ت

تحليل الحساسية	Sensitivity analysis
تحليل الشبكات	Network analysis
تخفيض	Optimize
تخفيض	Minimization
تدفق	Flow
تدفق أعظم	Maximal flow
تعضيم	Maximization
تعويض خلفي	Back substitution

ث

ثنائية	Duality
ثنائية مسألة التعيين	Assignment problem duality
ثنائية مشكلة النقل	Transportation problems duality
جبر البرمجة الخطية	Linear programming algebra

ج

جيدة التعريف	Well defined

ح

حد تكرارية	Sequential penalty
حساسية	Sensitivity

حل منتظم	Nondegenerate solution
حل أساسي مسموح به	Basic feasible solution
حل غير نظامي	Degenerate solution
حل هندسي	Geometric solution
حلول مسموح بها	Feasible solutions

خ

خوارزمية التدفق الأعظمي	Maximal flow algorithm
خوارزمية الركن الشمالي- الغربي	Northwest corner rule
خوارزمية السمبلكس	Simplex algorithm
خوارزمية السمبلكس المحسنة	Revised simplex method
خوارزمية العنونة	Labeling algorithm
خوارزمية النقل	Transportation algorithm
خوارزمية هنغارية	Hungarian algorithm

د

دالة الهدف	Objective function
دالة الهدف غير محدودة	Objective function unbounded
دالة لاجرانج	Lagrange function
درجة خارجة	Out degree
درجة داخله	Indegree
دوال الجزاء	Barrier functions

دوران	Cycling
دورة	Iteration

ر

رتبة مصفوفة النقل	Transportation matrix rank
رؤوس الراسم	Vertices

س

سعة	Capacity
سيئة الانتظام	Highly degenerate

ش

شبكة	Network
شرط الأمثلية	Optimality condition
شرط الحل الصحيح	Integrality condition
شكل قياسي	Canonical form

ص

صف محوري	Pivoting row
صياغة قياسية للبرنامج الخطي	Linear programming standard form

ض

ضلع	Edges
ضلع أمامي	Forward edges
ضلع عكسي	Backward edges

ضلع عكسي	Reverse edges

ط

طرف أيمن	Right-hand side
طريقة الأصلية- المقابلة	Primal-dual method
طريقة التفريع والتحديد	Branch and bound method
طريقة السمبلكس	Simplex method
طريقة السمبلكس لمشكلات النقل	Simplex method for transportation prob lems
طريقة المجموعة الفعالة	Active set method
طريقة المرحلتين	Two-phase method
طريقة كارماركر	method Karmarkar

ع

علاقات محورية	Pivoting relation
عمود محوري	Pivoting column
عنصر محوري	Pivoting element

غ

غير نظامية	Degenerate

ق

قاعدة بلاند	Bland rule
قيد إضافي	Redundant constraint

م

مبدأ الثنائية الضعيف	Weak principle of duality
متغير جديد	New variable
متغير داخل	Interring variable
متغيرات أساسية	Basic variables
متغيرات حرة	Free variables
متغيرات زائدة	Surplus variables
متغيرات غير أساسية	Nonbasic variables
متغيرات مساعدة	Artificial variables
متغيرات مكملة	Slack variables
متمّمة المكملة الضعيفة	Weak complementary slackness
مجموعات محدبة	Convex sets
محددة	Determinant
محورية	Pivoting
مخروط المنطقة المضلعة	Polyhedral cones
مخروطات محدبة	Convex cones
مسارات	Paths
مسألة الإنتاج	Production problem
مسألة التعيين	Assignment problem
مسألة التغذية	Diet problem

مسألة النقل	Transportation problem
مستوى فوقي	Hyperplane
مصب	Sink
المصفوفة المختزلة	Reduced matrix
مصفوفة المعاملات	Coefficient matrix
مصفوفة غير شاذة	Nonsingular matrix
مضاريب السمبلكس	Simplex multpliers
معاملات التكلفة	Cost coefficients
معاملات التكلفة النسبية	Relative cost coefficients
معاملات لاجرانج	Lagrange coefficients
معنى الأقتصادي لمتغيرات الثنائية	Duality economic interpretation variabl es
معيارية أحادية كلية	Total unimodularity
مفاهيم أساسية	Basic concepts
ملاءمة البيانات	Data fitting
منبع	Source

ن

نصف الفضاء	Halfspace
نظرية أساسية في الثنائية	Duality fundamental theorm
نظرية التدفق الأعظمي - القاطع الأصغر	Max-flow and min-cut theorem
نظرية كوهن- توكر	Kuhn-tucker theorem

نظرية لاجرانج	Lagrange theorem
نقاط حدية	Extreme points
نماذج البرمجة الخطية	Linear programming models

هـ

هندسة البرمجة الخطية	Linear programming geometry

و

وحدانية التدفق الأعظم	Maximal flow uniqueness

ثانياً : إنجليزي- عربي

A

Active set method	طريقة المجموعة الفعالة
Artificial variables	متغيرات مساعدة
Assignment problem	مسألة التعيين
Assignment problem duality	ثنائية مسألة التعيين

B

Backward edges	ضلع عكسي
Back substitution	تعويض خلفي
Barrier functions	دوال الجزاء
Basic concepts	مفاهيم أساسية
Basic feasible solution	حل أساسي مسموح به
Basic variables	متغيرات أساسية
Bland rule	قاعدة بلاند
Branch and bound method	طريقة التفريع والتحديد

C

Canonical form	شكل قياسي
Capacity	سعة
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Cost coefficients	معاملات التكلفة
Constraints	قيود
Convex cones	مخروطات محدبة

مجموعات محدبة	Convex sets
دوران	Cycling

D

ملاءمة البيانات	Data fitting
غير نظامية	Degenerate
حل غير نظامي	Degenerate solution
محددة	Determinant
مسألة التغذية	Diet problem
ثنائية	Duality
معنى الأقتصادي لمتغيرات الثنائية	Duality economic interpretation variable s
نظرية أساسية في الثنائية	Duality fundamental theorm
برمجة ديناميكية	Dynamic programming

E

ضلع	Edges
نقاط حدية	Extreme points

F

حلول مسموح بها	Feasible solutions
تدفق	Flow
ضلع أمامي	Forward edges

G

متغيرات حرة	Free variables
حل هندسي	Geometric solution

H

Halfspace	نصف الفضاء
Highly degenerate	سيئة الانتظام
Hungarian algorithm	خوارزمية هنغارية
Hyperplane	مستوى فوقي

I

Indegree	درجة داخله
Integers	أعداد صحيحة
Integer programming	برمجة صحيحة
Integrality condition	شرط الحل الصحيح
Interring variable	متغير داخل
Iteration	دورة

K

method Karmarkar	طريقة كارماركر
Kuhn-tucker theorem	نظرية كوهن- توكر

L

Labeling algorithm	خوارزمية العنونة
Lagrange coefficients	معاملات لاجرانج
Lagrange function	دالة لاجرانج
Lagrange theorem	نظرية لاجرانج
Linear programming	برمجة خطية
Linear programming algebra	جبر البرمجة الخطية

Linear programming geometry	هندسة البرمجة الخطية
Linear programming models	نماذج البرمجة الخطية
Linear programming non canonical form	أشكال غير قياسية للبرنامج الخطي
Linear programming standard form	صياغة قياسية للبرنامج الخطي

M

Mathematical programming	برمجة رياضية
Max-flow and min-cut theorem	نظرية التدفق الأعظمي- القاطع الأصغر
Maximal flow	تدفق أعظم
Maximal flow algorithm	خوارزمية التدفق الأعظمي
Maximal flow uniqueness	وحدانية التدفق الأعظم
Maximization	تعضيم
Minimization	تخفيض

N

Network	شبكة
Network analysis	تحليل الشبكات
New variable	متغير جديد
Nonbasic variables	متغيرات غير أساسية
Nondegenerate solution	حل منتظم
Nonlinear programming	برمجة غير خطية
Nonsingular matrix	مصفوفة غير شاذة

Northwest corner rule	خوارزمية الركن الشمالي- الغربي

O

Objective function	دالة الهدف
Objective function unbounded	دالة الهدف غير محدودة
Optimality condition	شرط الأمثلية
Optimization	برمجه رياضية أو أمثلية
Optimize	تخفيض
Out degree	درجة خارجة

P

Paths	مسارات
Pivoting	محورية
Pivoting column	عمود محوري
Pivoting element	عنصر محوري
Pivoting relation	علاقات محورية
Pivoting row	صف محوري
Polyhedral cones	مخروط المنطقة المضلعة
Primal-dual method	طريقة الأصلية- المقابلة
Production problem	مسألة الإنتاج

R

Reduced matrix	المصفوفة المختزلة
Redundant constraint	قيد إضافي
Relative cost coefficients	معاملات التكلفة النسبية

Reverse edges	ضلع عكسي
Revised simplex method	خوارزمية السمبلكس المحسنة
Right-hand side	طرف أيمن

S

Sensitivity	حساسية
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Sequential penalty	حد تكرارية
Simplex algorithm	خوارزمية السمبلكس
Simplex method	طريقة السمبلكس
Simplex method for transportation problems	طريقة السمبلكس لمشكلات النقل
Simplex multpliers	مضاريب السمبلكس
Sink	مصب
Slack variables	متغيرات مكملة
Source	منبع
Special linear programming	برامج خطية خاصة
Surplus variables	متغيرات زائدة

T

Total unimodularity	معيارية أحادية كلية
Transportation algorithm	خوارزمية النقل
Transportation matrix rank	رتبة مصفوفة النقل

Transportation problem	مسألة النقل
Transportation problems duality	ثنائية مشكلة النقل
Two-phase method	طريقة المرحلتين

V

Vertices	رؤوس الراسم

W

Weak complementary slackness	متمّمة المكملة الضعيفة
Weak principle of duality	مبدأ الثنائية الضعيف
Well defined	جيدة التعريف

كشاف الموضوعات

س

ش

ض

ط

غ

ق

م